

Problémafelvetési, feladatkészítési képességek vizsgálata

1. Bevezetés

A problémamegoldás mindig fontos része volt a matematikaoktatásnak, problémafelvetéssel vagy feladatkészítéssel azonban ritkán foglalkozunk a reguláris matematikaórákon. Általában azt gondoljuk, hogy az órákon megjelenő feladatok forrása csak valamilyen tankönyv, feladatgyűjtemény, esetleg maga a szaktanár lehet – ennek megfelelően a problémafelvetés képessége szinte soha nem kerül előtérbe (Ellerton et. al. 2015).

A problémafelvetési tevékenység matematikaórákon való megjelenése azonban nem volna teljesen haszontalan. A szakirodalomban gyakran megjelenik, hogy a Pólya által is leírt (Pólya 1957, 1977) szakértő szintű problémamegoldás fontos eleme, hogy a megoldó a folyamat során variálja a problémát, így újabb és újabb kérdéseket talál. A problémafelvetés a versenyzőknek és a felvételizőknek is nagyon hasznos és szükséges, hiszen sok olyan feladat van, amihez eredeti formájában esetleg nem tudnak hozzáfogni, csak azt például részfeladatokra bontva vagy variálva. A problémafelvetés kutatása ezért is aktuális és fontos.

Számos kutatás kapcsolja össze a matematikai problémafelvetési képességeket a matematikai problémamegoldási képességekkel és a kreativitással (Bonotto, Dal Santo, 2015; Leung 1997; Koichu et. al. 2016). Ezért hasznos lehet, ha valaki a problémamegoldási folyamaton kívül is foglalkozik feladatvariálással, új problémák felvetésével.

2. A problémafelvetés vizsgálata

A problémafelvetés modernkori kutatását Silver és Kilpatrick munkái alapozták meg (Silver 1994; Kilpatrick 1987). Vizsgálata az utóbbi egy-másfél évtizedben lett a matematika-didaktika vizsgálatának egyik központi témája (Koichu et.al. 2011, Cai et.al. 2015). Florence Mihaela Singer, Nerida F. Ellerton és Jinfá Cai szerkesztésében 2015-ben megjelent egy könyv *Mathematical Problem Posing* címmel, melyben számos tanulmány vizsgálja a problémafelvetés kutatásának mai helyzetét (Cai et.al. 2015).

A szakirodalom sokféle környezetben, sokféle értelmezésben és módon vizsgálja a problémafelvetést. Nagyon különböző az, hogy kiknek a problémafelvetési képességeit vizsgálják a kutatások (versenyfeladatkészítők, szaktanárok, tanítók, matematika tanárszakos hallgatók, matematikából tehetséges diákok, alsó tagozatos diákok stb.). Abban is nagy különbségeket találunk, hogy mit értenek az egyes kutatók problémafelvetés alatt. Ioannis Papadopoulos ötféle definíció-csoportot különböztet meg, amivel a szakirodalomban a

problémafelvetést értelmezik (1.). Ezek az értelmezések nem teljesen különbözőek, azonban eltérő szemléletet jelentenek, és ezáltal eltérő vizsgálatokat eredményeznek. Az öt csoport:

- (i) a problémafelvetés új problémák generálása/készítése
- (ii) problémafelvetés már meglévő problémák újraformálásával
- (iii) a problémafelvetés egyszerre jelentheti új probléma létrehozását és korábbi újraformálását (i)+(ii)
- (iv) a problémafelvetés új kérdések felvetése és régi kérdések újraformálása, új szemszögből való vizsgálata
- (v) problémafelvetés, mint modellezési folyamat.

A problémafelvetés vizsgálata különböző környezetekben történhet. Papadopoulos szerint két nagy csoportra különíthetők el ezek: a problémafelvetés önálló vizsgálata, vagy problémafelvetés más matematikai konstrukciókkal együtt vizsgálva – ilyen például a problémamegoldási képességekkel vagy a matematikai kreativitással való összehasonlítás.

A problémafelvetés képességének tanítása és vizsgálata is több okból történhet. A problémafelvetés és feladat készítés lehet a tanárképzés része (hiszen a matematikatanárok fontos kompetenciája, hogy képesek legyenek a csoportjaiknak megfelelő feladatokat és feladatsorokat összeállítani). Lehet oktatási vagy pedagógiai eszköz, ebben az esetben történhet a problémamegoldás tanítása céljából, vagy diagnosztikus célból: a tanulók konceptuális megértésének, nehézségeinek, tudásának felmérésére.

Az elkészített problémák, feladatok elemzése sem egyforma szempontok szerint történik az egyes kutatásokban, így általában nehéz megállapítani, hogy ki mit ért „jó” probléma és „jó” problémafelvetési képesség alatt. A négy legelterjedtebb vizsgálati szempont, hogy a problémafelvető milyen sok feladatot tud készíteni („*fluency*”), ezek mennyire különböznek egymástól („*flexibility*”), mennyire eredetiek vagy újszerűek („*originality*”) és matematikaileg mennyire helyénvalóak.

Rosli és munkatárai 2015-ben írt cikkükben ennél részletesebb 11 szempontot sorakoztatnak fel a diákok/tanárjelöltek által felvetett problémák vizsgálatára:

- | | |
|--|--|
| • <i>Az információ forrása</i> | • <i>Magával ragadó, vonzó</i> |
| • <i>Megoldhatóság</i> | • <i>Nehézségi szint</i> |
| • <i>Hasonló problémát már látott/oldott meg</i> | • <i>Eredetiség és kreativitás</i> |
| • <i>Életből vett probléma</i> | • <i>Kihívást jelentő</i> |
| • <i>Realisztikus, értelmes, érthető</i> | • <i>Korosztálynak megfelelő.</i> |
| • <i>Matematikailag pontos/megfelelő</i> | Ez utóbbi a tanulmányban a középiskolások számára megoldható feladatokat jelentette. |

Látható, hogy a problémafelvetés nagyon sokféle párhuzamos értelmezésben él együtt, ezért nagyon pontosan és világosan kell fogalmazni a problémafelvetéssel foglalkozó kutatásokban, hogy egyértelmű legyen, hogy a sok fogalom alatt ki mit ért.

3. Kutatás

A Matematika Tanulásméleti és -pszichológiai Kutatócsoportban Rékasi Annával közösen kidolgoztunk egy keretrendszert, amivel a diákok 7-12. évfolyamon matematikaórán foglalkozhatnak problémafelvetéssel, feladatkészítéssel. Ennek során a diákok csapatokban különböző problémafelvetési stratégiákkal egy feladatsort készítenek, majd a csapatok megoldják és értékelik egy másik csapat feladatsorát. (Bővebb leírás itt olvasható: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelev.pdf) A módszert több iskolában is kipróbáltuk, elemeztük a diákok által készített feladatokat, és interjúkat készítettünk a résztvevő tanárokkal a tapasztalatokról.

Ez alapján összeállítottunk a feladatok értékelésére egy komplex szempontrendszert, amivel vizsgálható az elkészített feladatok „jósága”. Ehhez meg kellett fogalmazni és súlyozni az általunk fontosnak tartott, és a szakirodalomban olvasott szempontokat, majd validálni az elkészült szempontrendszert, azaz ellenőrizni, hogy valóban azt mérjük-e, amit szeretnénk vele mérni – a „jó” feladatok lesznek-e a legmagasabb pontszámúak. Egy „jó” feladattól azt várjuk el, hogy amikor az adott tananyagot tanítjuk, fel tudjuk adni, ne kelljen rajta sokat változtatni. Legyen megfelelően, didaktikusan beilleszthető a tananyagba, legyen olyan tanulási cél, amihez alkalmazható a feladat (pl. ez egy jó gyakorlófeladat, vagy tanulságos versenyfeladat, stb). Nyújtson élvezetet a megoldása – ne legyen unalmas vagy helytelenül, elavultan beöltöztetett. Az elkészült szempontrendszer az 1. táblázatban látható.

Szakmai rész	pont	Élvezetességi rész	pont	
Valamilyen Tananyaghoz illő	8 pont	Újszerű/eredeti /ötletes	6 pont	Az összegük, kivéve, ha az összeg nagyobb mint 6. Ekkor 6 pont.
Nehéz/könnyű (kihívás)	4 pont	Matematikai élmény	6 pont	
Matematikailag helyes	8 pont	Beöltöztetés	6 pont	6 pont
Korosztályhoz illő	5 pont	Korszerűség	4 pont	4 pont
Összesen 25 pont		Összesen 16 pont		

1. táblázat

A pontozás segítségével megállapítottunk olyan szinteket, amik felett már jónak nevezhető egy feladat. Ehhez külön vizsgáltunk szakmai és élvezetességi szempontokat, amik az 1.

táblázatban láthatók. Szakmailag jónak nevezzük azt a feladatot, ami a szakmai részben összesen elér legalább 20 pontot, és a szakmai rész valamely szempontjában minimum 80%-ot. Hasonlóan határoztuk meg az élvezetesség szempontjából jó feladatokat. Azt a feladatot nevezzük „élvezetességileg” jónak, ami az élvezetességi részben elér legalább 12 pontot, és valamelyik szempontból az élvezetességi részben minimum 80%-ot. Összességében jónak nevezzük azokat a feladatokat, amik szakmailag és élvezetesség szempontjából is jók.

A diákok által elkészített, beküldött, majd általunk értékelt feladatok között számos jó, és számos gyengébb feladat is szerepelt. Eddig összesen 21 csapat feladatsorait értékeltük (3-4 fős csapatokban készítettek feladatsorokat a diákok). Ezek közül, az általunk meghatározott szempontok és minimumfeltételek alapján 10 feladatsor (4 feladatból állnak) volt szakmailag jó, 11 feladatsor élvezetességileg jó. Összesen 6 feladatsor került az „összességében” jó kategóriába, azaz ennyi lett szakmailag és élvezetességileg is jó.

Ez azért is nagyon jó eredmény, mert korábban vizsgáltuk matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és feladatkészítési képességeit, és közülük nagyon sokan nem tudtak jó feladatokat készíteni – a hallgatóktól sok matematikailag helytelen, értelmezhetetlen szövegű, vagy középiskolás módszerekkel nem megoldható feladat érkezett (Rékasi, Stirling 2018, 2019).

A körülbelül 100 beérkezett feladat (néhány csapat több feladatsort is készített) vizsgálatából és a szaktanárokkal történt beszélgetésekből következtetést levonhattunk. Érdekes volt például látni, hogy milyen témakörök, beöltöztetések érdeklik a diákokat. Leendő matematikatanárokként ez azért is fontos, mert így majd mi is olyan feladatokat adhatunk diákjaink kezébe, amiket érdekesnek, élvezetesnek találnak. Ez főleg olyan csoportokban hasznos, ahol a diákok többségét nem nyűgözi le önmagában a matematika szépsége.

Rengeteg feladat foglalkozott a koronavírus-járvánnyal (a kutatás távolléti oktatásban 2020 és 2021-ben zajlott). Ezek között voltak kifejezetten a járvány terjedésével foglalkozó modellezési feladatok, és olyanok is, amik csak beöltöztetésükben jelenítették meg a vírust.

Ilyen feladatra egy példa:

„Debrecen lakossága 202560 fő. Sajnos egy Milánóból hazatérő férfi hordozza magával a koronavírust, és ezt elterjesztette a reptéren. Ez a vírus naponta 3-szor annyi emberre terjed tovább. (Az 1. nap csak egy fertőzött van.)

- a. *Hány nap alatt fertőződik meg az összes lakos?*
- b. *Egy gyógyszer segítségével naponta 20 embert tudnak gyógyítani, de ezt csak két héttel a vírus elterjedése után találták fel. Így hány napba telik, mire megfertőződik mindenki?”*

A koronavírus-járvány mellett foglalkoztatta a diákokat kedvenc színészeik magánélete is, így ezzel kapcsolatos, nagyon ötletes feladatok is készültek. Az alábbiakban egy Timothée Chalamet színész és az egyik 10. osztályos csapat tagjainak közös kalandjairól szóló feladatsor néhány részletét mutatom be. A feladatban a színész és a feladatot kitaláló diákok mellett matematikatanárnőjük is szerepel.

„Timmy úgy döntött, hogy éveken át tartó romantikus, de sikertelen udvarlások után külső segítséget kér a “Nagy Ő” megtalálásához. Ezért felkereste ... és ... (két csoporttag) európai statisztikus barátait, hogy szembesítsék őt a tényleges adatokkal: hány nő van a világon, aki tökéletes lenne számára?

1. *A világon jelenleg 3 861 911 923 nő él. Timothée számára azonban a legideálisabbak a 16-24 év közötti nők, kiknek száma 572 115 168.*

- a) *Hány százaléka az ideális nők száma az összes nő számának?*
- b) *Az ideális korú nők 43%-a vár még az igazira. Hányan vannak ők?*
- c) *Am a házasságra váró, ideális korú nők közül sem tud mindenki bagelt sütni, amely köztudottan Timmy legkedveltebb étele, csupán 0,5%-uk. Hány olyan nő van, aki az ezelőtti feltételeknek megfelelően még a bagel sütésre is képes?*

Az első feladat g) feladatrészében végül kiderül, hogy a színész számára leginkább megfelelő partner a csoport harmadik tagja. Így a feladatsor további feladatai már az ő közös programjaikról és utazásaikról szól. A feladatok a feladatsor többi részén is statisztikával és valószínűségszámítással foglalkoznak.

2. *Valentin-nap alkalmából Timothée és ... úgy döntenek, Párizsba utaznak. Az egyik itt töltött estélyükön a kaszinózást választják programjuknak. Miután megérkeztek a szórakozóhelyre, és lenyűgöztek minden paparazzo-fotóst korszakalkotó stílusukkal, belekezdenek a játékba.*

- a) *Először egy olyan játékkal játszanak, amely a matematikához kapcsolódik, mert mindkettőjük matektanára, ... tanárnő és Ms. Lawton is nagyon jól kitanította nekik a valószínűségszámítás csinját-bínját. A játék során egy dobókockával dobunk. A hosszú, bonyolult játékot úgy lehet elkezdeni, ha valaki hatost dob. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Timmy ötödjére dob hatost?*

4. Összegzés

Végeredményül elmondható, hogy a módszer jól alkalmazható volt az iskolákban, még a járványhelyzet okozta nehézségek ellenére is. A szaktanárokkal készített interjúk nagyon jól sikerültek és tanulságosak voltak. Ezek alapján fejleszteni, és könnyebben alkalmazhatóvá

tudjuk tenni a módszert. A résztvevő diákok és a tanáraik is élvezték a kísérletet, bár időnként sok munkával járt a feladatok átnézése és javítása, valamint az, hogy nekünk is elküldjék őket. A szempontrendszer is alkalmasnak bizonyult az elkészült feladatok értékelésére. A pontok alapján valóban azok a feladatok számítanak „jónak”, amiket szívesen, és változtatások nélkül alkalmazni lehet egy iskolai matematikaórán. A jövőben szeretnénk kipróbálni a módszert jelenléti oktatásban is, úgy, hogy a csapatoknak kevesebb feladtból álló feladatsort kell készítenie.

Bibliográfia

- (1.) MIDK2020 konferencia, plenáris előadás: Ioannis Papadopoulos: *Navigating in the diverse landscape of problem posing*. <https://sites.google.com/site/midk2016jan/plenaris-eloadok/abstract>
- (2.) Oktatási Hivatal honlapja, „A tanulást támogató további hasznos anyagok”: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelev.pdf
- Bonotto, Cinzia & Santo, Lisa. (2015). *On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School*. 103-123. 10.1007/978-1-4614-6258-3_5.
- Cai, Jinfang & Hwang, Stephen & Jiang, Chunlian & Silber, Steven. 2015. *Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions*. 10.1007/978-1-4614-6258-3_1.
- Ellerton, Nerida F. & Singer, Florence & Cai, Jinfang. (2015). *Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future*. 547-556. 10.1007/978-1-4614-6258-3_26.
- Kilpatrick, J. 1987. *Formulating the problem: Where do good problems come from?* In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. 2011. *Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they?* In M. Avotiņa, D. Bonka, H.
- Kontorovich, Igor & Koichu, Boris & Leikin, Roza & Berman, Avi. (2016). *Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they?*. 120-125. *Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (pp. 120-125). Latvia: Latvia University
- Leung, Shuk-kwan. (1997). *On the role of creative thinking in problem posing*. *ZDM*. 29. 81- 85. 10.1007/s11858-997-0004-9.
- Pólya, György. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pólya György 1977. *A gondolkodás iskolája* Gondolat, Budapest.
- Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2018): *Matematika tanárszakos hallgatók probléma-felvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása*. TDK dolgozat
- Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2019): *Matematika tanárszakos hallgatók probléma-felvetési képességeinek vizsgálata fejlesztési céllal*. TDK dolgozat
- Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Goldsby, Dianne & Gonzalez, Elsa & Capraro, Robert & Onwuegbuzie, Anthony. 2015. *Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing*. 10.1007/978-1-4614-6258-3_16.
- Silver, E. A. 1994. *On mathematical problem posing*. – In: *For the Learning of Mathematics* 14(No.1), p. 19-28.