Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

(φ, Γ)-modulusok

Anderlik Csaba

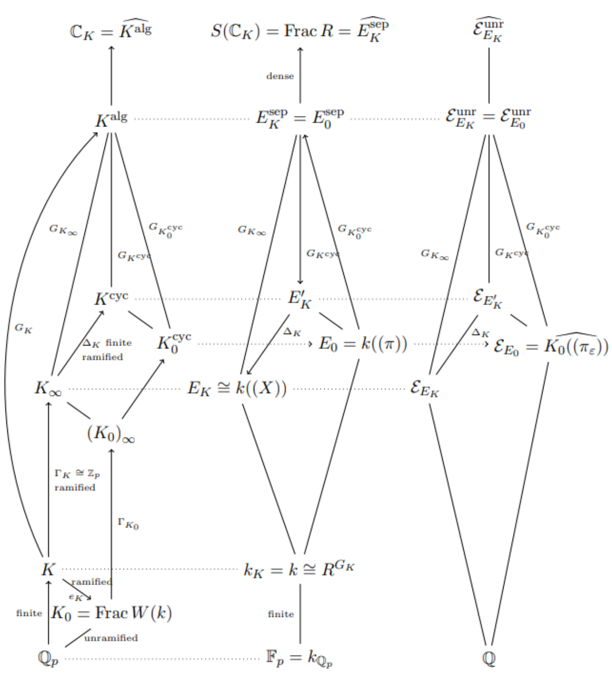
Témavezető:
Zábrádi Gergely, egyetemi docens

Egyéni kutatómunka
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2022.

Bevezetés

A következő pár oldalban megpróbálom ismertetni a (φ, Γ)-modulusokat a körosztási bővítés felett és kiegészíteni a Beamer prezentációmban írtakat. Ebben segítségemre lesz Jean-Marc Fontaine és Yi Ouyang könyve, melynek címe: The theory of p-adic Galois Repesentations (Fontaine and Ouyang), továbbá Szabó Dávid MSc szakdolgozata, melynek címe: p-adic Galois representations and (φ, Γ)-module (Dávid ((2015))).
Az algebrai számelmélet egy központi eleme a $\mathbb{Q}$ és a $\mathbb{Q}_p$ abszolút Galois csoportjának és ezen csoport reprezentációinak megértése. Ezen csoportok bonyolultsága lázban tartja a matematikusok nagyrészét, így nem meglepő, hogy ezen csoportok megértésének érdekében elméletek alakultak ki. Ezen elméletek egyike a Jean-Marc Fontaine és társai által megalkotott elmélet, amely segít megadni egy ekvivalenciát a $G_{\mathbb{Q}_p} := Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q})$ Galois csoport B-reprezentációinak kategóriája és (φ, Γ)-modulusok kategóriája között, ahol B-re gondolhatunk, mint a p elemű véges testre ($\mathbb{F}_p$) vagy, mint a p-adikus egészekre ($\mathbb{Z}_p$) vagy akár, mint p-adikus racionális számokra ($\mathbb{Q}_p$). Ez alapján, akkor a B-reprezentációkat mod p reprezentációknak, $\mathbb{Z}_p$-reprezentációknak és $\mathbb{Q}_p$-reprezentációknak szoktuk nevezni. Ezen ekvivalencia lesz a beszámolóm egyik fő eleme.



1. ábra. Galois bővítések, Dávid ((2015))

(φ, Γ)-modulusok

0.1. Szükséges definíciók és állítások

1. Definíció. (B-reprezentációk) Legyen G egy topologikus csoport és B egy topologikus gyűrű, melyen hasson folytonosan a G csoport. X-et a G csoport B-reprezentációjának nevezzük, ha X egy végesen generált B-modulus, melyen értelmezve van egy szemilineáris, folytonos G csoport általi hatás.

Példák B-reprezentációkra:

1. X lineáris reprezentáció, ha G általi hatás triviális.
2. X mod p reprezentáció, ha $B = \mathbb{F}_p$ test a diszkrét topológiára nézve.
3. X $\mathbb{Q}_p$-reprezentáció, ha $B = \mathbb{Q}_p$ test a p-adikus topológiára nézve.
4. X szabad B-reprezentáció, ha X szabad B-modulus:
   (a) Ha B^G-nek vesszük egy F zárt résztestjét és nézzük G-nek egy F-reprezentáció -ját (V), akkor ha $X = B \otimes_F V$-et felruházzuk egy G hatással, akkor X egy szabad B-reprezentáció.

2. Definíció. X szabad B-reprezentációját G-nek triviálisnak nevezzük, ha a következő feltételek közül legalább az egyiket teljesíti:

1. X-nek létezik X^G elemeiből álló bázis.
2. $X \simeq B^d$, ahol a csoporthatás természetes és d a B-reprezentáció rangja.

3. Állítás. *Legyen $d \in \mathbb{N}$.*

1. *X d-ed rangú szabad B-reprezentációk és a $H^1_{cont}(G, GL_d(B))$ kohomológia csoport $[X]$ ekvivalencia osztályai között megadható bijekció.*
2. *X akkor és csak akkor triviális d-ed rangú szabad B-reprezentáció, ha $[X]$ a megkülönböztetett pont $H^1_{cont}(G, GL_d(B))$-ben.*

4. Állítás. *(Hilbert 90. tétele) Vegyük K testnek egy Galois bővítését, mely legyen L, és L legyen a diszkrét topológiával felszerelve, akkor a $G := Gal(L/K)$ csoport L-reprezentációja triviális.*

5. Definíció. ((F, G)-reguláris) B-et (F, G)-regulárisnak nevezzük, akkor ha a következőket teljesíti:

1. B egy integritási tartomány.
2. $B^G = C^G$.
3. Minden $0 \neq b \in B$, létezik egy $\lambda \in F$, melyre $g(b) = \lambda b$ teljesül, tetszpőleges $g \in G$ esetén, akkor b invertálható B-ben.

6. Észrevétel. *Ha B egy test, akkor mindig (F, G)-reguláris.*

7. Definíció. Legyen V F-reprezentációja G-nek, akkor mondjuk V-t B által elfogadottnak, ha $B \otimes_F V$ triviális B-reprezentációja G-nek.

8. Tétel. *Legyen V egy tetszőleges F-reprezentációja G-nek, továbbá a $B \otimes_F V$ G csoporthatással felszerel egy szabad B-reprezentáció G-nek. Legyen $\mathbf{D}_B$ egy funktor G-nek az F-reprezentációinak kategóriájából ($\mathbf{Rep}_F(G)$) a $E := B^G$ vektorterek kategóriájába, tehát $\mathbf{D}_B(V) := (B \otimes_F V)^G$. Továbbá legyen α_V egy olyan leképezés, melyre teljesül, hogy:*

$$\begin{aligned} \alpha_V : B \otimes_E \mathbf{D}_B(V) &\longrightarrow B \otimes_F V \\ \lambda \otimes x \quad &\longmapsto \quad \lambda x, \end{aligned}$$

ahol $\lambda \in B$, $x \in \mathbf{D}_B(V)$, α_V B-lineáris és felcserélhető a G általi hatással.
Ha B (F, G)-reguláris, akkor G-nek minden V F-reprezentációjára a α_V injektív és a $\dim_E \mathbf{D}_B(V) \leq \dim_F V$. Továbbá akkor és csak akkor van egyenlőség, ha α_V izomorfizmus, és továbbá α_V akkor és csak akkor izomorfizmus, ha V B által elfogadott.

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 22. oldalától elérhető. □

Mod p Galois reprezentációi egy p karakterisztikájú testnek

Ebben a részben végig E legyen egy $p > 0$ karakterisztikájú test és $G_E := \mathrm{Gal}(E^s/E)$, ahol E^s E-nek a szeparábilis lezárása. Továbbá jelöljük φ-vel az abszolút Frobenius leképezését E-nek.

9. Definíció. (φ-modulus) M E vektorteret, akkor nevezzük φ-modulusnak, ha létezik egy φ leképezés M-en, amely szemi-lineáris és E-re megszorítva megegyezik az abszolút Frobenius leképezéssel.

10. Definíció. M, mint E feletti φ-modulust, akkor nevezzük étale-nak, ha $\Phi : M_\varphi \to M$ leképezés izomorfizmus, ahol $\Phi(\lambda \otimes x) := \lambda \varphi(x)$, $x \in M$, $\lambda \in E$, és ha $\dim_E M$ véges.

Legyen M-nek $\{e_1, \ldots, e_d\}$ egy bázisa E felett, akkor a φ általi képe ezen báziselemeknek $\varphi(e_i) = \sum_{j=0}^{d} a_{i,j} e_j$, ahol $a_{i,j} \in E$, és így $\Phi(1 \otimes e_i) = \sum_{j=0}^{d} a_{i,j} e_j$. Ekkor a 8 tétel miatt a következő teljesül:

$$M \text{ étale} \Longleftrightarrow \Phi \text{ izomorfizmus} \Longleftrightarrow \Phi \text{ injektív} \Longleftrightarrow \Phi \text{ szürjektív} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow M = E \cdot \varphi(M) \Longleftrightarrow A = (a_{i,j}) \text{ inverálható mártix } E\text{-ben.}$$

11. Állítás. *$\mathcal{M}_{\varphi}^{ét}(E)$ algebrai kategória, ahol ezen jelöléssel az E feletti étale φ-modulusok kategóráját jelöljük.*

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 26. oldalán található. □

Jelöljük a $\mathbf{D}_{E^s}$ funktort mod p reprezentációk felett $\mathbf{M}$-mel, mivel egy G csoport mod p reprezentációi egy $\mathbb{F}_p$ véges dimenziós vektortérként lehet gondolni, így az

$$\alpha_V : E^s \otimes_E \mathbf{M}(V) \longrightarrow E^s \otimes_{\mathbb{F}_p} V$$

leképezés egy izmorfizmus, és ez által $\dim_E \mathbf{M}(V) = \dim_{\mathbb{F}_p} V$, mivel 8 tétel és 4 állítása miatt.

12. Állítás. *Ha V egy d dimenziós mod p reprezentáció, akkor az $\mathbf{M}(V)$ étale φ-modulus.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang 27. oldalán. □

13. Észrevétel. $\mathbf{M} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G) \longrightarrow \mathcal{M}_{\varphi}^{ét}(E)$ *egy additív funktor.*

Legyen $\mathbf{V} : \mathcal{M}_{\varphi}^{\text{ét}}(E) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G)$ egy olyan funktor, mely egy M étale φ-modulushoz E felett a következő halmaz lesz $\mathbf{V}$ általi képe: $\mathbf{V} = \{y \in E^s \otimes_E M | \varphi(y) = y\} = (E^s \otimes_E M)_{\varphi=1}$, amely egy rész $\mathbb{F}_p$-vektortér, amely stabil G általi hatásra nézve.

14. Lemma. *A következő természetes leképezés*

$$\begin{aligned} \alpha_M : E^s \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbf{V}(M) &\longrightarrow E^s \otimes_E M \\ \lambda \otimes v \quad &\longmapsto \qquad \lambda v \end{aligned}$$

injektív és ez által $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathbf{V}(M) \leq \dim_E M$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval könnyen következik a lemma. □

15. Tétel. $\mathbf{M} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G) \longrightarrow \mathcal{M}_{\varphi}^{ét}(E)$ *funktor megad egy ekvivalenciát a két Tannakian kategória között és* $\mathbf{V} : \mathcal{M}_{\varphi}^{ét}(E) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G)$ *funktor az* $\mathbf{M}$ *kvázi-inverz funktora.*

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvében 29. oldaltól kezdve megtalálható. □

p-adikus Galois reprezentációk egy p karakteriszikájú test felett

A mod p reprezentációkkal leírt definíciók, állítások és tételek hasonlóan kimondhatók és bizonyíthatók mint p-adikusak felett.

Továbbra is legyen E egy $p > 0$ karakterisztikájú test és $G_E := \mathrm{Gal}(E^s/E)$, ahol E^s E-nek a szeparábilis lezárása. E-re gondolhatunk úgy is, mint $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, ahol $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ az E-nek a Cohen gyűrűje, továbbá $\mathcal{E}$ E Cohen gyűrűjének hányadostestje. A Cohen gyűrű rekurzív definíciója miatt tényleg teljesül a $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ leírás, mivel

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p^n\mathcal{O}_{\mathcal{E}},$$

és így továbbá $\mathcal{E}$ gondolhatunk úgy is, mint $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{p}\right]$. Az $\mathcal{E}$-nek meg van az a szép tulajdonsága, hogy nulla karakterisztikájú, teljes diszkrét értékelési gyűrű, a maradéktestje az E, és az $\mathcal{E}$ maximális ideálja p által generált. Sőt mi több, ha veszünk két értékelési gyűrűt, amire az előbbiekben leírt feltételek teljesülnek, akkor ezen két értékelési gyűrű folytonosan izomorf lesz. Ha még a E-ről feltesszük, hogy perfect, akkor az izomorfizmus egyértelmű és $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ megegyezik az E által generált Witt vektorok gyűrűjével.

16. Állítás. *Legyen $\mathcal{E}^{ur}$ az $\mathcal{E}$-nek a maximális nem elágazó bővítése, és $\hat{\mathcal{E}^{ur}}$ ezen bővítés teljes lezárása, akkor a következő két állítás teljesül:*

1. $(\widehat{\mathcal{E}^{ur}})^G = \mathcal{E}$, $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})^G = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$,
2. $(\widehat{\mathcal{E}^{ur}})_{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$, $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})_{\varphi=1} = \mathbb{Z}_p$.

17. Állítás. *Legyen X egy $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$-reprezentációja G-nek, akkor a*

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} X^G \longrightarrow X$$

természetes leképezés egy izomorfizmus.

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 35. oldalán elérhető. □

Ez alapján ha veszünk egy T $\mathbb{Z}_p$-reprezentációját egy G csoportnak, akkor $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ egy φ-modulusa lesz $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ felett, és ez által definiálható T-re az $\mathbf{M}$ funktor és α_T leképezés is, melyekre a mod p reprezentációknál megbeszéltek teljesülnek. Továbbá $\mathbf{V}$ funktor és α_M leképezés is ugyanígy megadható, melyekre szintén ugyanazok a tulajdonságok teljesülnek.

18. Tétel. *A $\mathbf{M} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G) \longrightarrow \mathcal{M}_{\varphi}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ funktor megad egy ekvivalenciát a két kategória között és $\mathbf{V} : \mathcal{M}_{\varphi}^{\acute{e}t}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ funktor kvázi-inverze $\mathbf{M}$-nek.*

Bizonyítás. Ezen bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 37. oldalán. □

Ezen voltak a $\mathbb{Z}_p$-reprezentációk számunkra fontos alap állításai, és ugyaneznek $\mathbb{Q}_p$-reprezentációkra is telejesülnek.

Az R gyűrű

Legyen K egy p-adikus test, legyen $\mathcal{O}_K$ az egészek gyűrűje, $\mathfrak{m}_K$ maximális ideálja $\mathcal{O}_K$-nak, és így ez által k legyen a maradéktest, melynek karakterisztikája legyen $p > 0$. $W = W(k)$ Witt vektorok gyűrűje és K_0 a W hányadostestje, tehát $K_0 = \mathrm{Frac}W = W\left[\frac{1}{p}\right]$. Továbbá jelöljük C-vel K teljes, algebrailag zárt testbővítését.

Vegyük a $\overline{K}$ egy olyan L résztestjét, amely tartalmazza K_0-t, és ennek az egészek gyűrűje legyen $\mathcal{O}_L =: A$.

19. Definíció. Az A gyűrű-ből képzett $R(A)$ gyűrűt definiáljuk úgy, hogy

$$R(A) := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

ahol minden n-re legyen $A_n = A$, és minden n-re továbbá legyen az átmenő leképezés az abszolút Frobenius leképezés, tehát $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R(A)$, akkor $(x_{n+1})^p = x_n$.

20. Állítás. *$R(A/pA)$ gyűrű és a következő S halmaz között megadható egy bijekció, ahol*

$$S := \left\{\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} | x^{(n)} \in A, \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\right\}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 68. oldalán. □

$\mathcal{O}_L$ szeparábilis, a p-adikus topológiára nézve teljes gyűrű, ez által $\mathcal{O}_L \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_L/p^n\mathcal{O}_L$ leképezés egy izomorfizmus, amelyből következik, hogy $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{\hat{L}}/p\mathcal{O}_{\hat{L}}$, és így $R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L) = R(\mathcal{O}_{\hat{L}}/p\mathcal{O}_{\hat{L}}) = \left\{\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\hat{L}}, \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\right\}$.

21. Definíció. $R := (\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}) = R(\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C)$.

A C-n értelmezett szokásos p-adikus értékelésből definiálható az R-en egy értékelés úgy, mint $v_R(x) := v_C(x) = v_C(x^{(0)})$. Ez által a következő lesz igaz R-re.

22. Állítás. *R gyűrű egy teljes értékelési gyűrű a v_R-re nézve. R továbbá tökéletes p karakteriszitikájú. Hányadosteste ($Frac(R)$) teljes nem-arkimédeszi tökéletes p karakterisztikájú test, amely továbbá algebrailag zárt.*

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 69-70. oldalán található. □

23. Állítás.
1. *A következő sorozat egzakt: $0 \longrightarrow U_R \longrightarrow Frac(R)^* \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$, ahol $Frac(R)^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ leképezés az értékelés R-en.*
2. *$Frac(R)^* = Hom\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], C^*\right)$.*
3. *$U_R = Hom\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], \mathcal{O}_C^*\right) = \overline{k}^* \times U_R^+$.*
4. *$U_R^+ = Hom\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right], U_R^+\right) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_R^1$.*

5. $U_R^1 = \{x \in R | v_R(x-1) \geq 1\}$ *izomorf a következő inverz limesszel:* $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} U_R^1/(U_R^1)^{p^n}$.

Az állításban használt jelölések magyarázása: $\mathrm{Frac}(R^*)$ az R hányadostestjének multiplikatív csoportja, U_R az R-beli egységek csoportja, $U_R^+ = \left\{x \in R | x^{(n)} \in (1+\mathfrak{m}_C)\right\}$.

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 71-72. oldalán megtalálható. □

A következő pár állítás és definíció az R-en lévő Galois hatásról szól.

24. Állítás. *A $G_{K_0} = Gal(\overline{K}/K)$ természetes módon hat R-en és R hányadostestjén. Ha vesszük K_0 egy olyan L bővítését, amely benne van $\overline{K}$-ban, és legyen H az L-hez tartozó Galois csoport G_{K_0}-ban, akkor*

1. $R^H = R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$,
2. $(Frac(R))^H = Frac(R(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L))$,

ahol R^H maradéktestét jelöljük $k_L = \overline{k}^H$, amely L-nek lesz a maradékteste. Ha L^*-on az értékelés diszkrét, akkor $k_L = R^H$.

Ha veszünk egy olyan $\left\{\epsilon^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, melyre teljesül, hogy $\epsilon^{(0)} = 1$, $\epsilon^{(1)} \neq 1$, és $n \geq 2$-től kezdve a következő rekurzió teljesül, hogy $(\epsilon(n+1))^p = \epsilon^{(n)}$, akkor ha vesszük a következő bővítések unióját, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_0\left(\epsilon^{(n)}\right),$$

akkor ezen bővítésre gondolhatunk úgy is, hogy a K_0 testhez minden n-re hozzávesszük a p^n-edik egységgyököt. Ezen egységgyökök uniójának bővítését jelöljük K_0^{cyc}-val.

25. Állítás. *Ezen $\epsilon = \left\{\epsilon^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $R(\mathcal{O}_{K_0^{cyc}}/p\mathcal{O}_{K_0^{cyc}})$-ban egység lesz.*

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 74. oldalán elérhető. □

26. Tétel. *Legyen $H = Gal(\overline{K}/K_0^{cyc})$, és legyen $\pi = \epsilon - 1 \in R^H$, akkor*

1. $\widehat{k[[\pi]]^{rad}} = R^H$,
2. $\widehat{k((\pi))^{rad}} = (Frac(R))^H$.

27. Következmény. *Legyen θ_m a következő projekció, hogy*

$$\begin{array}{cccc} \theta_m : & R & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & x_m \end{array}$$

minden $m \in \mathbb{N}$-re, akkor $\theta_m(R^H) = \mathcal{O}_{K_0^{cyc}}/p\mathcal{O}_{K_0^{cyc}}$.

Bizonyítás. (Következmény) A bizonyítás következik az előző tételből és abból, hogy $R^H = R(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{cyc}}}/p\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{cyc}}})$, amely a 24 állításból következik. □

Bizonyítás. (Tétel) A bizonyítás Fontaine and Ouyang 74. oldalán megtalálható. □

28. Tétel. *(Fontaine alaptétel) Legyen E_0^s szeparábilis lezárása $E_0 = k((\pi))$-nak R hányadostestjében, akkor E_0^s sűrű Frac(R)-ben, továbbá a G_{K_0} csoport általi hatásra nézve stabil marad. Továbbá megadható egy izomorfizmus $H'_{K_0} := Gal(\overline{K}/K_0^{cyc})$ Galois csoportelemei és $Gal(E_0^s/E_0)$ Galois csoport elemei között úgy, mint*

$$g|_{E_0^s} \in Gal(E_0^s/E_0),$$

ahol $g \in Gal(\overline{K}/K_0^{cyc})$.

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang 75-76-77. oldalán megtalálható. □

29. Definíció. (Teichmüller szelés) A következő leképezést nevezzük Teichmüller szelésnek (s), amely $\overline{k}$-ból képez R-be úgy, hogy

$$s : a \in \overline{k} \longmapsto (\left[a^{p^-n}\right])_{n\in\mathbb{N}},$$

ahol $\left[a^{p^-n}\right] = (a^{p^-n}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{ur}}}$-t nevezzük az a^{p^-n} Teichmüller reprezentánsa.

Az $[\epsilon] = (\epsilon, 0, 0, \dots) \in W(R)$ ϵ Teichmüller reprezentánsa, ez által definiáljuk π_ϵ-reprezentánsa, mint $\pi_\epsilon = [\epsilon] - 1 \in W(R)$. Továbbá, mivel $W(R)$-re gondolhatuk úgy is, mint

$$W(R) = \varinjlim W_n(R) = \varinjlim \frac{W(R)}{p^n},$$

ahol $W_n(R) = \{(a_0, \dots, a_{n-1})|a_i \in R\}$ egy topológikus gyűrű. Jelöljük $W[[\pi_\epsilon]] := \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_\epsilon^n | \lambda_n \in W\right\}$ halmazt, amelybeli elemek konvergensek $W(R)$-ben, így megadható egy folytonos beágyazása $W[[\pi_\epsilon]]$-nek $W(R)$-be, és így azonosítható $W(R)$ egy zárt részgyűrűjével.

Az előbb megadott folytonos beágyazás megadható $W(\mathrm{Frac}(R))$-ban is, mivel π_ϵ invertálható $W(\mathrm{Frac}(R))$-ben, így ha $W((\pi_\epsilon)) := \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \pi_\epsilon^n | \lambda_n \in W\ \lambda_n = 0, \text{ ha } n \ll 0\right\} = W[[\pi_\epsilon]]\left[\frac{1}{\pi_\epsilon}\right]$ részhalmaza $W(\mathrm{Frac}(R))$-ban. Továbbá $W(\mathrm{Frac}(R))$ teljessége miatt, folytonosan beágyazható $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0} := \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \pi_\epsilon^n | \lambda_n \in W\ \lambda_n \to 0, \text{ ha } n \to -\infty\right\}$ is $W(\mathrm{Frac}(R))$-ba, amely $= W[[\pi_\epsilon]]\left[\frac{1}{\pi_\epsilon}\right]$ p-adikus teljesítése lesz. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}$ egy teljes, diszkrét értékelési gyűrű, amely maximális ideálját p generálja, és maradékteste E_0.

$\tilde{B}$ test és a résztestjei

30. Definíció. Legyen $W(\mathrm{Frac}(R))$ R hányadostestjének Witt gyűrűje, és ez által $\tilde{B}$ definiáljuk úgy, hogy $W(\mathrm{Frac}(R))$ hányadosteste.

Ezen $\tilde{B}$-re gondolhatunk úgy is, mint $\tilde{B} = W(\mathrm{Frac}(R))\left[\frac{1}{p}\right]$, mivel $W(\mathrm{Frac}(R))$ egy teljes értékelési gyűrű, amelynek a maximális ideálja p által generált. G_{K_0} természetes módon hat $\tilde{B}$-n és $W(\mathrm{Frac}(R))$ is, amely hatás kommutatív az abszolút Frobenius leképezéssel. Továbbá $\tilde{B}$-re még az is teljesül, hogy $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}\left[\frac{1}{\pi_\epsilon}\right]$ részhalmaza lesz.

31. Állítás. *F legyen véges bővítése E_0-nak, amely tartalmazza $E^s = E_0^s$, akkor létezik egy egyértelmű véges $\mathcal{E}_F$ bővítése $\mathcal{E}_0$-nak $\tilde{B}$-ben, amely nem-elágazó bővítés, és $\mathcal{E}_F$ maradékteste F.*

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 80. oldalán megtalálható. □

(φ, Γ)-modulus

32. Definíció. A D étale φ-modulust $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (vagy $\mathcal{E}$) felett (φ, Γ)-modulusnak nevezzük, ha létezik egy csoporthatás Γ_K-n, amely szemi-lineáris, és felcserélhető (φ) az abszolút Frobenius leképezéssel. Továbbá D étale (φ, Γ)-modulus, ha a csoporthatás Γ_K-n folytonos.

A 18 tétel szerint, ha V egy $\mathbb{Z}_p$- vagy $\mathbb{Q}_p$-reprezentáció, akkor az $\mathbf{M}(V)$ egy étale (φ, Γ)-modulus lesz az előző tétel szerint. Továbbá így az előző tétel szerint az $\mathbf{M}$ funktor meg ad egy ekvivalenciát a $\mathbb{Z}_p$- vagy $\mathbb{Q}_p$-reprezentációk és az étale között. Ez egy Tannakian-kategória ekvivalencia lesz.

33. Lemma.

1. *$\{1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}\}$ egy bázisa E_0-nak $\varphi(E_0)$ felett.*
2. *$\{1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}\}$ egy bázisa E_K-nak $\varphi(E_K)$ felett.*
3. *$\{1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}\}$ egy bázisa E^s-nek $\varphi(E^s)$ felett.*
4. *$\{1, [\epsilon], \ldots, [\epsilon]^{p-1}\}$ egy bázis $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$-nak $\varphi\left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}\right)$ felett.*

Bizonyítás. A bizonyítás Fontaine and Ouyang könyvének 83. oldalán található meg. □

34. Definíció. A $\psi : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ operátort definiáljuk úgy, hogy

$$\psi : \sum_{i=0}^{p-1} [\epsilon]^i \varphi(x_i) \longmapsto x_0.$$

35. Állítás. *A ψ leképezésre a következő teljesülnek:*

1. *$\psi\varphi = Id$.*
2. *ψ felcserélhető G_K általi csoporthatással.*

Bizonyítás. A bizonyítása megtalálható Fontaine and Ouyang 84. oldalán. □

36. Állítás. *1. Ha V egy $\mathbb{Z}_p$-reprezentációja G_K-nak, akkor egyértelműen létezik egy ilyen $\psi : \mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}(V) \to \mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}(V)$ operátor, amelyre teljesül, hogy*

$$\psi(\varphi(a)x) = a\psi(x), \quad \psi(a\varphi(x)) = \psi(a)x.$$

Ahol $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$, és $x \in \mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}(V)$ sőt, mi tőbb ψ kommutál Γ_K-val.

2. Ha D egy étale (φ, Γ)-modulus $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ vagy $\mathcal{E}_K$ felett, akkor egyértelműen létezik egy olyan $\psi : D \to D$ operátor, amelyre az elsőrészben teljesültek igazak. Továbbá minden $x \in D$-re teljesül, hogy

$$x = \sum_{i=0}^{p^n-1} [\epsilon]^i \varphi^n(x_i),$$

ahol $x_i = \psi^n([\epsilon]^{-i}x)$.

Bizonyítás. A bizonyítása megtalálható Fontaine and Ouyang 84. oldalán. □

37. Állítás. *Ha D étale φ-modulus $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}$, akkor ψ opertátor folytonos a gyenge topológiára nézve. Továbbá ψ folytonos minden D étale φ-modulus $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ felett a gyenge topológiában.*

Bizonyítás. A bizonyítása megtalálható Fontaine and Ouyang 85. oldalán. □

Irodalomjegyzék

S. Dávid. p-adic Galois representations and (φ, Γ)-modules, 2015. Elérhető: `https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_mat/2015/szabo_david.pdf`.

J.-M. Fontaine and Y. Ouyang. Theory of p-adic Galois Representations. Elérhető: `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf`.