Önálló Kutatómunka 1

Mészáros Botond

1. Bevezetés

A környezetünkben lévő folyadékok belső súrlódással rendelkeznek: minden mozgó folyadék, ha mozgása során mozgó részei egymáshoz képest eltérő sebességgel bírnak, mozgásában csillapodik és belső mozgási energiája hővé alakul, mozgása - belső súrlódásának nagyságától függően - lassan vagy gyorsabban megszűnik. Egy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományban elhelyezkedő, állandó sűrűségű, össze nem nyomható folyadé mozgását a Navier-Stokes egyenletek írják le:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \text{grad})\ \mathbf{v} + \text{grad} p &= \nu \triangle \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Az egyenletben az ismeretlen függvények a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ sebességtér, mely Ω minden pontjában megadja az áramló folyadék pillanatnyi sebességét és a skalár értékű $p = p(x,t)$ nyomás. Kiválasztva az Ω egy x pontját valamely t időpontban, akkor az ott lévő kis, egyébként nem összenyomható, azaz térfogatában nem deformálható folyadékelem a sebességmező lokális változásából fakadó nyomóerőt érzékel. Ez az a nyomóerő, melyet a nyomás adott pontbeli gradiense képvisel. A folyadék összenyomhatatlanságát a második egyenlet fejezi ki. Ez egyfajta kényszerfeltétel, úgy is mondhatnánk, hogy az egyenlet megoldását kizárólag olyan sebességmezők között keressük, melyek ezt a feltételt kielégítik.

Az első egyenlet három egyenlet, mindhárom egyenlet a sebességmező komponenseinek és a nyomásmező deriváltjait tartlamazza. Ha $k = 1, 2, 3$ az euklideszi tér három, egymásra merőleges iránya, akkor a három egyenlet közül a k-adik a sebesség-komponensek segítségével a következő alakot ölti:

$$\partial_t v_k + \sum_{l=1}^{3} v_l \partial_l v_k + \partial_k p = \nu \sum_{l=1}^{3} \partial_l^2 v_l. \tag{2}$$

A folyadék összenyomhatatlanságát kifejező egyenlet pedig a következő:

$$\sum_{l=1}^{3} \partial_l v_l = 0. \tag{3}$$

Ahhoz, hogy a problémát teljessé tegyük, természetesen meg kell adni egy peremfeltételt Ω határán és egy kezdeti feltételt az időváltozó $t = 0$ pillanatában. A peremfeltétel függ az Ω tulajdonságaitól, más peremfeltételek állnak elő, ha Ω a teljes tér (határfeltétel a végtelenben) és mások, ha Ω egy véges, peremes tartomány. Ha azonban a perem- és a kezdeti feltételek adottak, akkor a folyadék mozgása nem más, mint a megoldása a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \mathrm{grad})\ \mathbf{v} + \mathrm{grad} p &= \nu \triangle \mathbf{v}, \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}, \\ \mathrm{PF}[\mathbf{v}(x, \cdot);\ x \in \partial\Omega] &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol PF[...] a peremfeltétel nullára redukált alakja. Ha a megoldást valmely $I = (0, T)$ időintervallumon keressük, akkor tehát azt mondjuk, hogy $\mathbf{v} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3$ *klasszikus* megoldása (4)-nek, ha $\mathbf{v}$ térbeli változóban legalább kétszer, idő változójában legalább egyszer folytonosan differenciálható és létezik olyan $p : \Omega \times I$ térbeli változójában legalább egyszer folytonosan differenciálható függvény, mellyel $\mathbf{v}$ a Cauchy-problémában szereplő egyenlőségeket teljesíti.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ megoldja a Cauchy-problémát. Legyen K egy kompakt részhalmaza Ω-nak. Szorozzuk be a Caushy-probléma első egyenletét $\mathbf{v}$-vel, majd integráljuk mindkét oldalt K-n. Felhasználva a $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ egyenletet, némi átalakítással a következőt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_K \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = -\int_K \mathrm{div}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - p\mathbf{v}\right) + \nu \int_K \left(\triangle \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \sum_{k,l=1}^{3} (\partial_l v_k)^2\right). \tag{5}$$

Felhasználva Gauss integráltételét és feltételezve, hogy ∂K elég jól viselkedik, kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_K \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = -\int_{\partial K} \left(\mathbf{v}\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p\mathbf{v} + \nu\, \mathrm{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right) - \nu \int_K \sum_{k,l=1}^{3} (\partial_l v_k)^2. \tag{6}$$

Legyen most Ω a teljes tér. Tegyük fel, hogy mind $\mathbf{v}$, mind p elég gyorsan csökken asszimptotikusan a végtelenben ahhoz, hogy a fenti egyenletekben szereplő K helyett kompakt halmazok egy felszálló sorozatát tekintve, melyek uniója lefedi $\mathbb{R}^3$-at, a sorozat tagjain kiszámolt felületi integrálok limesze nullához tartson. Ekkor (felhasználva Lebesgue dominált konvergencia-tételét):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k,l=1}^{3} (\partial_l v_k)^2. \tag{7}$$

A kapott egyenlet bal oldalán a folyadék teljes mozgási energiájának változása, jobb oldalon a belső súrlódás, a szomszédos folyadékrészek eltérő sebességéből adódó csúszás okozta *hőtermelés* mértéke található. Jól látható, hogy a jobb oldali integrandus mindig pozitív, emiatt a belső súrlódás a folyadék teljes mozgási energiáját mindig csökketni. Az egyenlet a ν paraméter fizikai jelentését is feltárja: ő határozza meg, hogy mennyire erős a folyadékban a belső súrlódás okozta energiadisszipáció. Neve *dimenziótlan kinematika viszkozitás.*

Most tekintsük a ((4)) egyenlet megoldásainak egy $(\mathbf{v}_\nu, p_\nu)$ sorozatát, mely megoldások a ν egyre kisebb értékeihez tartoznak. Naivan azt várnánk, hogy ahogy $\nu \to 0$, úgy a megoldás a sebességmező a $C_x^2 C_t^1(\mathbb{R}^3 \times I)$, a nyomás pedig a $C_x^1 C_t^0(\mathbb{R}^3 \times I)$ függvényosztályban egy olyan $(\mathbf{v}_0, p_0)$ megoldáshoz tart, mely kielégíti a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0, \mathrm{grad})\ \mathbf{v}_0 + \mathrm{grad} p_0 &= 0 \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}_0 &= 0 \\ \mathbf{v}_0(\cdot, 0) &= \mathbf{u} \\ \mathrm{PF}[\mathbf{v}_0(x, \cdot);\ x \in \partial\Omega] &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

Euler-egyenletet. Megismételve az előző számítást, miközben $\nu = 0$, látjuk, hogy az Euler-egyenlet minden klasszikus megoldása megtartja a folyadék teljes energiáját:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = 0. \tag{9}$$

A ν egy rendkívül fontos tulajdonsága, hogy kísérleti összeállításban szabályozható, azaz a fenti $\nu \to 0$ limesz megoldásai kísérletekben is vizsgálhatóak. A fenti naiv elgondolást a kísérletek azonban nem igazolják. A legfőbb tapasztalat, hogy az egyre bonyolultabb és kaotikusabb áramlás energiadisszipációja a $\nu \to 0$ határesetben nem szűnik meg, ahogy azt a (9) egyenlet sugallná. Helyette az átlagolás lokális disszipáció, azaz az energiasűrűség csökkenésének rátája arányos az energiasűrűség 3/2-edik hatványával. Ezek szerint a (4) Navier–Stokes-egyenlet $\nu \triangle \mathbf{v}$ jobb oldala nem tekinthető a (8) Euler-egyenlet reguláris perturbációjának. Reguláris perturbációnak akkor tekinthetnénk, ha a $\mathbf{v}_\nu$ klasszikus megoldások nem lépnének ki a fenti függvényterekből. Ha viszont fenn akarjuk tartani azt a képet, miszerint a $\lim_\nu \mathbf{v}_\nu$ valóban az Euler-egyenlet egy megoldásához tart, akkor szembe kell néznünk azzal a problémmal, miszerint az Euler-egyenlet klasszikus megoldásai megtartják az energiát. Létezhetnek olyan megoldásai az Euler-egyenletnek, melyek nem tartják meg az áramlás teljes energiáját? Látjuk, hogy ha a teljes energia véges, akkor a $C_x^1 C_t^1(\mathbb{R}^3, I) \oplus C_x^1 C_t^0(\mathbb{R}^3, I)$ függvénytérben biztosan nincs, mivel azokra alkalmazható a Gauss-tétel, illetve a deriváltak manipulására szolgáló egyenlőségek. Ezek szerint az Euler-egyenletek nem klasszikus, hanem *gyenge* megoldásait kell vizsgálnunk, melyek alacsonyabb regularitással rendelkeznek mint a klasszikus megoldások függyvénytere. Ezen megoldások jellemzésének első, heurisztikus analízisét Lars Onsager végezte el [1].

Onsager az Euler-egyenletet annak formális Fourier-transzformáltjával definiálta. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a peremfeltételek periodikus áramlást definiálnak, ami egyenértékű azzal, hogy az áramlást a három dimenziós topológiai tóruszon vizsgáljuk. Klasszikus megoldásokat keresve az egyenlet alakja

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \mathrm{grad})\ \mathbf{v} + \mathrm{grad} p &= 0, \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{10}$$

ahol minden függvény térbeli változója a $\mathbb{T}^3$ tórusz pontjai közül kerül ki. Onsager legfontosabb eredménye a következő megállapítás.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ *Fourier-transzormáltja megoldja a* (8) *egyenlet formális Fourier-transzformálásából származó egyenletet. Ha* $\mathbf{v}$ *Hölder-folytonos és Hölder exponense nagyobb mint* $1/3$*, akkor a folyadék teljes mozgási energiája, azaz*

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \tag{11}$$

a folyadék mozgásának időbeli fejlődése során megmarad. Ellenben, ha a Hölder-exponens kisebb, mint 1/3, akkor a folyadék energiája nem megmaradó mennyiség.

Ezt hívjuk Onsager-sejtésnek. A sejtés első felét 1994-ben egymástól függetlenül Eyink [2], valamint Constantin, Weinan és Titi igazolták [3]. Eyink bizonyítása nagyban támaszkodik Onsager alapötletére, azaz a nem közvetlenül az (**??**) egyenletet, hanem annak formális Fourier-transzformálásából származó végtelen számú, csatolt, közönséges differenciálegyenlet megoldását vizsgálja Littlewood-Paley módszerrel. Constantin és Titi azonban az Euler-egyenlet *gyenge* megoldásait vizsgálta.

Definíció. Legyen a $(\mathbf{v}, p)$ pár valamely X függvénytér eleme. Azt mondjuk, hogy a pár gyenge megoldása az Euler-egyenletnek $\mathbb{T}^3 \times (0,1)$-en, ha $\mathbf{v} : \mathbb{T}^3 \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$, $p : \mathbb{T}^3 \times (0,1) \to \mathbb{R}_0^+$ leképezések bármely $\boldsymbol{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{T}^3 \times (0,1))^{\oplus 3}$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^3 \times (0,1))$ páros esetén kielégítik a

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{v} \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi} + \mathrm{grad}\, \boldsymbol{\phi} \ :\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\phi}) &= 0, \\ \int_{(0,1)} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\, \psi &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

ahol bármely két A és B mátrix esetén $A : B = \mathrm{Tr}(AB)$. Könnyen látható, hogy a fenti integrálok mindig léteznek ha $\mathbf{v}$ komponensei és p legalább lokálisan négyzetesen integrálhatóak, azaz L^2_{loc} elemei. Hogy az Euler-egyenlet gyenge megoldásai meglehetősen furcsán tudnak viselkedni, már a 90'-es évek óta tudható. A terület kutatásában néhány korai mérföldkő:

1. Tétel. *(Scheffer, 1993 [4]) Az Euler-egyenletnek létezik téridőben kompakt tartományon nem eltűnő, gyenge megoldása, mely $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$-ben helyezkedik el.*

2. Tétel. *(Shnirelman, 1997 [5]) Az Euler-egyenletnek létezik téridőben kompakt tartományon nem eltűnő, gyenge megoldása, mely $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$-ben helyezkedik el.*

3. Tétel. *(Shnirelman, 1998 [6]) Az Euler-egyenletnek létezik gyenge megoldása, melyre teljesül, hogy $\mathbf{v}(\cdot, t)$ minden komponense $L^2(\mathbb{R}^2,)$-ben helyezkedik el és a teljes energia és ezzel $\|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2}$ monoton csökken $[0, \infty)$ időintervallumon.*

Ezekből a tételekből nem csak az derül ki, hogy az Euler-egyenlet gyenge megoldásai nem feltétlenül tarják meg az energiát, hanem az is, hogy a gyenge megoldások nem feltétlenül egyértelműek: Scheffer és Shnirelman eredményeiből jól látszik, hogy az $\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{0}$ kezdeti értékhez tartozó megoldás nem egyértelmű, hiszen létezik olyan megoldás is, mely valamely későbbi időpontban mozgásba jövő és egy ennél későbbi időpontban pedig nyugvó folyadékot ír le.

Mind Shnirelman, mind Scheffer eredményei a gyenge megoldások regularitására vonatkozóan viszonylag tág keretet hagy. A bizonyítás L^2 -beli megoldások létezését biztosítja. Az Euler-egyenlet gyenge megoldásainak és azok regularitásának vizsgálata a 2000-es évek közepét követően részben azon Székelyhidi Lászlótól és Camillo de Lellis-től származó felismerés hajtotta előre, mely szerint a gyenge megoldások konstruálása konvex integrálási müdszerrel is megvalósítható. A konvex integrálás technikája John Nash és Nicolaas Kuiper 1954-ben, Riemann-sokaságok euklideszi terekbe való C^1 izometrikus beágyazásának lehetőségét bizonyító munkáiban jelent meg.

Az önálló kutatómunka első félévében a Nash–Kuiper-tétel bizonyításának áttekintése által megismerkedtem a konvex integrálás, mint bizonyos nem-lineáris PDE problémák megoldására szolgáló módszer alapjaival. John Nash bizonyításával Camillo de Lellis modern jelöléseket használó áttekintő cikkén [7] keresztül ismertem meg.

2. A Nash–Kuiper-tétel

Legyen M egy n dimenziós C^∞ sokaság, melyen adott egy $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$ metrika. Legyen (U, ϕ) egy lokális koordinátarendszer, azaz $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ az U nyílt halmaz minden p pontját a $\phi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ koordinátákkal látja el. A lokális koordináták U minden p pontjában megadják a helyi T_pM érintőtér egy $e_1(p), \dots, e_n(p)$ bázisát, melyekre teljesül, hogy ha $f \in C^\infty(M)$, akkor

$$e_k(p)f = \partial_k(f \circ \phi^{-1})(x_1(p), \dots, x_n(p)). \tag{13}$$

Legyen U minden p elemére definiálva a $g^{ij}(p)$ számok, mint $g^{ij}(p) = g(e_i(p), e_j(p))$. Ha a g metrika sima, akkor U-n minden $p \mapsto g^{ij}(p)$ leképezés sima.

Legyen $\gamma : [0,1] \to M$ egy M-beli C^1 görbe, melyről feltesszük, hogy teljesen U-ban fekszik. A γ görbe érintője a lokális koordináta-bázisban kifejthető mint $\dot\gamma(t) = \sum_k \dot\gamma_k(t) e_k(\gamma(t))$, ahol $\gamma_k(t) = x_k(\gamma(t))$. A γ görbe hossza a g metrika szerint:

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Mivel a γ görbe teljesen az U-ban fekszik, így a ϕ szerinti képének hosszát is kiszámolhatjuk:

$$S_\phi(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij}(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{15}$$

Ahol δ^{ij} a szokásos euklideszi metrika. Ez a hossz viszont általában nem egyezik meg $L_g(\gamma)$-val. Sőt, ha (V, ψ) egy másik lokális koordináta-rendszer, γ teljesen $U \cap V$-ben fekszik, akkor semmi sem garantálja, hogy $S_\phi(\gamma) = S_\psi(\gamma)$.

Definíció. Legyen M egy n dimenziós sima Riemann-sokaság a g metrikával. Egy $v : M \to \mathbb{R}^N$ leképezés C^k immerziója az M sokaságnak az N dimenziós euklideszi térbe, ha a $\mathrm{d}v$ leképezés M minden pontjának érintőterében lévő lineárisan független vektorok halmazát lineárisan független halmazba képzi és M v-szerinti képe C^k-felület $\mathbb{R}^N$-ben. A v immerzió beágyazás, ha injektív. A v immerzió izometrikus, ha $\mathbb{R}^N$ euklideszi metrikájának M-re vett $v^*\delta$ visszahúzottja megegyezik g-vel.

Lokális koordinátákban az euklideszi metrika visszahúzottjának komponensei a $p \in U$ pontban $(v^*\delta)^{ij}(p) = (\partial_i(v \circ \phi^{-1})(x) \cdot \partial_i(v \circ \phi^{-1})(x)$, ha $x = \phi(p)$ és $\cdot$ az euklideszi skalárszorzatot jelöli. Ezek szerint a v leképezés akkor izometrikus immerzió, ha minden lokális környezetben teljesül a

$$g^{ij} = \partial_i u \cdot \partial_j u \qquad u = v \circ \phi^{-1} \tag{16}$$

elliptikus egyenletrendszer. Az egyenletrendszer $n(n+1)/2$ egyenlete N ismeretlen függyvényt határoz meg. Az egyenlet megoldása során Nash olyan immerziókból indult ki, melyek nem teljesítették a (16) egyenletet, de rendelkeztek azzal a tulajdonsággal, hogy az M-beli görbéket nem hosszabbították meg g-szerint számolt hosszukhoz képest.

2. Definíció. Legyen M egy n dimenziós sima Riemann-sokaság a g metrikával. Egy $v : M \to \mathbb{R}^N$ leképezés C^k immerziója rövid, ha $v^*\delta$ az M minden pontjában teljesíti a $v^*\delta \le g$ mátrix-egyenlőtlenséget. A leképezés szigorúan rövid, ha $v^*\delta < g$.

A rövid leképezésekkel Nash beágyazási tétele zárt sokaságokra a következőképpen szól:

4. Tétel. *(Nash, 1954 [8]) Legyen M sima, zárt (kompakt és peremektől mentes) Riemann-sokaság a g metrikával. Legyen $N \geq n+2$ és $v : M \to \mathbb{R}^N$ egy sima rövid immerzió. Ekkor minden ϵ-hoz létezik olyan $u : M \to \mathbb{R}^N$ egy C^1 izometrikus immerzió, hogy $\|u - v\|_{C^0} < \epsilon$. Ha v immerzió beágyazás, akkor u szintén választható úgy, hogy beágyazás legyen.*

Kuiper érdeme, hogy Nash eredményeiben az $N \geq n + 2$ feltételt az $N \geq n + 1$ feltételre javította.

5. Tétel. *(Nash-Kuiper, [8,9,10]) Legyen M sima, zárt Riemann-sokaság a g metrikával. Legyen $N \geq n + 1$ és $v : M \to \mathbb{R}^N$ egy sima rövid immerzió. Ekkor minden ϵ-hoz létezik olyan $u : M \to \mathbb{R}^N$ egy C^1 izometrikus immerzió, hogy $\|u - v\|_{C^0} < \epsilon$. Ha v immerzió beágyazás, akkor u szintén választható úgy, hogy beágyazás legyen.*

2.1. Bizonyítás

Nash tételének bizonyítása során egy iteratív perturbációs sémát alkalmaz, melynek kiindulási pontja a feltételezett rövid immerzió. A séma minden egyes lépésében az immerziót lokalizált, oszcillatív perturbációk módosítják, hogy a kapott új immerzió által visszahúzott euklideszi metrika közelebb kerüljön az M sokaság g metrikájához. A konstrukciókhoz szükség van geometriai topológia következő eredményére, mely Whitehead háromszögelési eredményeire alapszik:

1. Lemma. Legyen M sima sokaság, $\{U_\alpha\}$ az M egy nyílt fedése. Ekkor létezik M-nek egy $\{V_\beta\}$ nyílt fedése a következő tulajdonságokkal:

1. minden V_β valamely U_α egy részhalmaza,
2. minden V_β lezárása M-ben diffeomorf $\mathbb{R}^n$ egy zárt labdájával,
3. minden V_β a $\{V_\beta\}$ család minden más elemével diszjunkt, kivéve legfeljebb véges számú elemet,
4. ha $p \in M$, akkor létezik olyan N_p környezete, mely a $\{V_\beta\}$ család legfeljebb $n + 1$ elemében található meg, mint részhalmaz,
5. $\{V_\beta\}$ felosztható $\mathcal{C}_1, \ldots \mathcal{C}_{n+1}$ osztályokra úgy, hogy az adott osztályban lévő elemek egymással diszjunktak.

Ha M zárt, akkor M kompaktsága miatt a Lemma $1, 3, 5$ állításai egyszerűen bizonyíthatóak. Sőt, M kompaktsága miatt bármely atlaszának bármely elemének lezártja kompakt M-ben. Továbbiakban mind a sima, zárt

M-et és a Lemmában felsorolt tulajdonságokat kielégítő $\{U_\alpha\}$ atlaszt rögzítettnek tekintjük. Legyen h szimmetrikus tenzor, mely $TM \otimes TM$-en hat (típusa $(0,2)$). Ha U_α adott, akkor U_α minden p pontjában kiszámolhatjuk $(h^{ij}(p))$ mátrix Hilbert-Schmidt normáját[1]. Mivel h egy C^0 tenzormező, így a Hilbert-Schmidt normák, mint p függvényei folytonosak és mivel U_α lezárása kompakt, így azok $\|h\|_{0,\alpha}$, U_α felett képzett supremuma véges. Legyen $\|h\|_0 = \max_\alpha\{\|h\|_{0,\alpha}\}$. Ezzel a normával a $(0,2)$ típusú C^0 tenzorok Banach-teret alkotnak. Ha $v : M \to \mathbb{R}^N$ egy C^1 leképezés, akkor hasonlóan képezhetjük először a $(\partial_i u^j)$ mátrixokat, ahol $u = v \circ \phi_\alpha^{-1}$ és ezek fenti konstrukcióval teljesen azonos félnormáját, melyet $\|Dv\|_0$-val jelölünk.

Nash iterációjának lelke (zárt Riemann-sokaságok esetén) a következő állítás:

1. Állítás. *Legyen M a fent rögzített sokaság, g metrika M-en. Legyen $w : M \to \mathbb{R}^N$ egy sima, szigorúan rövid immerzió. Legyen $\eta > 0$, $\lambda > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $C > 0$ és olyan sima, rövid immerzió $z : M \to \mathbb{R}^N$, hogy*

$$\|z - w\|_0 < \eta, \quad \|g - z^*\delta\|_0 < \lambda, \quad \|Dw - Dz\|_0 < C\sqrt{\|g - w^*\delta\|}. \tag{17}$$

teljesül. Ha w injektív, akkor z is választható injektívnek.

Ha az 1. Állítás fennáll, akkor a Nash-tétel bizonyítása a következőképpen történik. Legyen r az iteratív lépések során előállt immerziók indexe. Legyen $v_0 = \kappa v$, ahol v a kezdeti rövid immerzió, κ pedig választható 1-nek, ha v szigorúan rövid, egyébként mindig találhatunk κ számára olyan $0 < \kappa < 1$ értéket, hogy v_0 szigorúan rövid legyen. Legyen $\epsilon > 0$ adott. Tegyük fel, hogy M atlaszának indexei nemnegatív egészek. Legyen

$$\begin{aligned} \eta_r &= 2^{-r-1}\epsilon, \\ \lambda_r &= 4^{-r}. \end{aligned} \tag{18}$$

Tegyük fel, hogy az iteratív lépések során már sikerült megkonstruálnunk v_{r-1} szigorúan rövid immerziót. Az 1. Álítás miatt ekkor létezik olyan v_r rövid immerziója M-nek, hogy

$$\begin{aligned} \|v_r - v_{r-1}\|_0 &< \eta_r, \\ \|g - v_r^*\delta\|_0 &< \lambda_r, \\ \|Dv_r - Dv_{r-1}\|_0 &< C\sqrt{\|g - v_{r-1}^*\delta\|} < C\lambda_{r-1}^{1/2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Felhasználva (18)-at, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|v_r - v_{r-1}\|_0 &< \epsilon 2^{-r-1}, \\ \|g - v_r^*\delta\|_0 &< 4^{-r}, \\ \|Dv_r - Dv_{r-1}\|_0 &< C\sqrt{\|g - v_{r-1}^*\delta\|} < C2^{r-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

[1] Ha A egy $n \times m$ mátrix, akkor Hilbert-Schmidt normája az $(\mathrm{Tr}(A^T A))^{1/2}$

Ezekből az egyenlőtlenségekből a következő konklúziót vonhatjuk le: a v_r rövid immerziók sorozata egyenletesen konvergál egy $v : M \to \mathbb{R}^N$ C^0 leképezéshez. Mivel $\|g - v_r^*\delta\| \to 0$, így $v^*\delta$ izometria, emiatt mindenképpen immerzió. Mivel Dv_r Cauchy-sorozat, így v C^1 immerzió. Belátható, hogy ha v_0 injektív, akkor az iterációban szereplő paraméterek választhatóak úgy, hogy v injektivitása garantálható.

1. Következmény. *Legyen M a fent rögzített, n dimenziós zárt sokaság, g metrika M-en. Ekkor létezik M-nek izometrikus C^1 beágyazása $\mathbb{R}^{2n}$-be.*

A Következmény Whitney beágyazási tételét felhasználva adódik: Whitney tétele szerint, ha $N \geq 2n$, akkor M-nek létezik sima w beágyazása $\mathbb{R}^{2N}$-be. Egy komnpaktsági érvvel beláthatjuk, hogy ha w nem rövid, akkor létezik olyan $0 < \lambda < 1$ szám, hogy λw már rövid. Alkalmazva az 1. Állítást, kapjuk a Következményt.

3. Nash iteratív bizonyítása

Továbbiakban részletezem az 1. Állítás bizonyítását.

Nevezzük h-t *primitív metrikának* az M sokaságon, ha h szimmetrikus, sima, nemnegatív $(0, 2)$ forma, melynek rangja M minden pontjában legfeljebb 1.

2. Állítás. *Legyen M a fent rögzített sokaság, h metrika M-en. Legyen $\{U_\alpha\}$ az M egy véges atlasza. Ekkor léteznek $\{h_k\}$ primitív metrikák, hogy $h = \sum_k h_k$ és minden h_k tartója valamely U_α-ban van.*

A bizonyítás két lépésben történik meg. Első lépésben megjegyezendő, hogy rögzítve valamely lineárisan független, egy rangú leképezések $\{v_k \otimes v_k\}$ rendszerét $\mathbb{R}^n$ ben, akkor egyszerűen belátható, hogy bármely szimmetrikus mátrix felbontható ezek megfelelő lineárkombinációjára. Kifejtve h-t a lokális koordinátákban ezen bázis szerint, majd alkalmazva az egység egy megfelelő felbontását, kapjuk az állítást.

Szükség van még egy technikai Lemmára.

2. Lemma. *Legyen B egy, az $\mathbb{R}^n$ zárt egységlabdájával diffeomorf sokaság. Legyen ω a B egy immeriója $\mathbb{R}^N$-be, ahol $N \geq n + 2$. Ekkor léteznek $\nu, b : B \to \mathbb{R}^N$ leképezések B-n, hogy B minden pontjában*

$$|\nu(q)| = |b(q)| = 1, \quad \nu(q) \cdot b(q) = \nu(q) \cdot \omega_*(q)x = b(q) \cdot \omega_*(q)x = 0, \quad (21)$$

ahol x a T_qM tetszőleges eleme, $\omega_*(p)$ pedig az ω által definiált előretoló (push forward) operátor.

Legyen tehát w egy szigorúan rövd, sima immerzió, g sima metrika az M Riemann-sokaságon. Legyen $\lambda, \eta > 0$.

1. Legyen $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}$ az M egy véges atlasza, ϕ_α az egység egy, az atlasznak alárendelt felbontása. Mivel az atlasz véges, így minden U_α-hoz található olyan λ_α, hogy egyrészt $(1-\lambda_\alpha)g - w^*\delta$ pozitív U_α-n, másrészt $\|\lambda_\alpha g\|_{0,U_\beta} < \lambda/2$. Legyen $\{\phi_\alpha\}$ a fenti egységfelbontás és legyen $\phi = \sum_\alpha \lambda_\alpha \phi_\alpha$. Az előző egyenlőtlenségekkel könnyen látható, hogy $h = (1-\phi)g - w^*\delta$ pozitív az egész M-en és $\|g - (h + w^*\delta)\|_0 < \lambda/2$.

2. Legyen $h = \sum_\gamma h_\gamma$, $\gamma = 1, 2, 3, 4, \ldots$ a h felbontása primitív metrikákra. A bizonyítás következő lépésében a w leképezéshez a γ indexeknek megfelelően egy iteratív folyamat eredményeként előálló perturbációkat adunk. A γ-adik iteratív lépés után: $w_\gamma = w + w_1^P + \cdots + w_\gamma^P$. A w_γ^P perturbációk tartója egybeesik a h_γ függvények tartóival. Tegyük fel, hogy valamely $\lambda', \eta > 0$ esetében teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \|w_\gamma^P\|_{0,U_\alpha} &< \frac{\eta}{|\mathcal{A}|}, \\ \|Dw_\gamma^P\|^2_{0,U_\alpha} &< 2\|h\|_{0,U_\alpha}, \\ \|w_\gamma^*\delta - (w_{\gamma-1}^*\delta + h_\gamma)\|_{0,U_\alpha} &< \frac{\lambda'}{|\mathcal{A}|} \end{aligned} \tag{22}$$

Ekkor, ha $z = w + \sum_\gamma w_\gamma$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |w(q) - z(q)| &\leq \sum_\gamma \|w^P_{\gamma,u_\alpha}\| < \eta \\ |Dw(q) - Dz(q)| &\leq \sum_\gamma \|Dw_\gamma^P\|_{0,U_\alpha} < \sqrt{2}|\mathcal{A}|\|h\|_0^{1/2} = \|g - w^*\delta\|^{1/2}_{0,U_\alpha} \end{aligned} \tag{23}$$

Végül, mivel

$$|z^*\delta(q) - (w^* + h)(q)| \leq \sum_{\gamma>0} |w_\gamma^*\delta - (w_{\gamma-1}^*\delta + h_\gamma))(q)| < \lambda'. \tag{24}$$

Ha λ'-t megfelelően választjuk, akkor z rövid immerzió lesz és 1. Állítás minden állítása érvényes.

3. Tegyük fel, hogy w_{k-1}-et már megkonstruáltuk ($w_0 := w$). Tegyük fel, hogy w_{k-1} immerzió. Az 1. Lemma miatt feltehetjük, hogy az atlasz minden egyes elemének lezártja diffeomorf $\mathbb{R}^n$ zárt labdájával. Legyen $N \geq n+2$. Legyen U_α adott, ekkor 2. Lemma miatt találhatunk olyan ν és b $\mathbb{R}^N$ értékű mezőket U_α-n, hogy a Lemmában foglalt ortonormalitási feltételek teljesülnek. Legyen h_k alakja lokális koordinátákban $h_k = a_k^2 \mathrm{d}\psi_k \otimes \mathrm{d}\psi_k$ (U_α-n). Legyen $\sigma > 0$. Alkalmazzuk a következő perturbációt:

$$w_k^P = \nu\frac{a_k}{\sigma}\cos(\sigma\psi_k) + b\frac{a_k}{\sigma}\sin(\sigma\psi_k). \tag{25}$$

Rövid számolással kapjuk az alábbi eredményeket:

$$\begin{aligned} \|w_k^P\|_{0,U_\alpha} &\leq \frac{C_{1,k}}{\sigma} \\ \|Dw_k^P\|^2_{0,U_\alpha} &\leq \|h_k\|_{0,U_\alpha} + \frac{C_{2,k}}{\sigma}, \end{aligned} \tag{26}$$

így ha σ elég nagy, a (22) egyenlőtlenség első és második sora is teljesül, utóbbi miatt pedig, λ megfelelő választásával, w_k sorozat minden tagja immerzió. Emiatt képezhető δ visszahúzotja, ebből fakadóan némi számolás után kapjuk, hogy

$$|w_k^*\delta - w_{k-1}^*\delta - h_k|^2(p) \leq \frac{C_{3,k-1}}{\sigma} \tag{27}$$

Ezek szerint, ha σ értéke megfelelően nagy, akkor a 2 pontban felsorolt összes eredmény rekonstruálható.

4.

[1] Onsager, L. (1949). Statistical hydrodynamics. Il Nuovo Cimento (1943-1954), 6(2), 279-287.
[2] Eyink, Gregory L. "Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics I. Fourier analysis and local energy transfer." Physica D: Nonlinear Phenomena 78, no. 3-4 (1994): 222-240.
[3] Constantin, Peter, E. Weinan, and Edriss S. Titi. "Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation." Communications in Mathematical Physics 165, no. 1 (1994): 207-209.
[4] Scheffer, Vladimir. "An inviscid flow with compact support in space-time." The Journal of Geometric Analysis 3, no. 4 (1993): 343-401.
[5] Shnirelman, Alexander. "On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation." Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences 50, no. 12 (1997): 1261-1286.
[6] Shnirelman, Alexander. "Weak solution of incompressible Euler equations with decreasing energy." Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics 326, no. 3 (1998): 329-334.
[7] Lellis, Camillo De. "The masterpieces of John Forbes Nash Jr." In The Abel Prize 2013-2017, pp. 391-499. Springer, Cham, 2019.
[8] Nash, John. "C1 isometric imbeddings." Annals of mathematics (1954): 383-396.
[9] Kuiper, Nicolaas H. "On C1-isometric imbeddings. I." In Indagationes Mathematicae (Proceedings), vol. 58, pp. 545-556. North-Holland, 1955.
[10] Kuiper, Nicolaas H. "On C1-isometric imbeddings. II." In Indagationes Mathematicae (Proceedings), vol. 58, pp. 683-689. North-Holland, 1955.