

# Egyéni kutatómunka 1.

## Sztochasztikus Approximáció Hilbert-terekben

Monos Attila

Témavezető: Dr. Csáji Balázs Csanád

### I. BEVEZETÉS, MOTIVÁCIÓ

Az online tanuló algoritmusok működtetése során gyakran előfordul, hogy optimalizálási, vagy egyenletrendszer megoldási problémák során iteratív algoritmusokat kell használnunk. Azonban a gyakorlati alkalmazások során nem feltételezhetjük, hogy a mérések pontosak – a mérőműszer pontatlansága, az információtovábbítás során előforduló adatvesztés, vagy az online kérdőívek során tévesen, pontatlanul megadott információk ékes példái ennek a pontatlanságnak. Ezt úgy kezeljük, hogy az eltéréseket véletlen zajként kezeljük, és úgy próbálunk meg iterálni, hogy a zaj ne befolyásolja a konvergenciát, miközben elég jó közelítést adunk.

Természetesen ez magával vonja azt, hogy bármilyen tételt mondunk is ki az ilyen, zajos mérésekkel dolgozó iteráló algoritmusok konvergenciájáról, ahhoz valószínűségi számítások, statisztikai eszközökre van szükség.

A sztochasztikus iteráció nem csak online tanulás során alkalmazható – fontos szerepe van idősorok rekurzív becslésében, adaptív jelfeldolgozási módszerekben, adaptív irányítási algoritmusokban.

Kutatómunkám során megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust<sup>1</sup>, továbbá pár példát véges dimenzióban kimondott tételek Hilbert-térre való átültetéséről<sup>3</sup>. Jelenlegi fókuszom egy, véges dimenziós esetre megismert tétel általánosítása Hilbert-terekre.

### II. ALAPMODELL

#### II-A. Módszer

Adott egy lineáris egyenletrendszerünk az alábbi formában:

$$Hr = r, \quad \text{ahol } H \in \mathbb{R}^{n \times n}, r \in \mathbb{R}^n,$$

vagyis  $H$ -t függvény helyett operátorként képzeljük el – azaz mátrixokkal reprezentáljuk. Ennek egy speciális esete az, amikor adott  $f$  költségfüggvény mellett

$$Hr = r - \nabla f(r) \quad (1)$$

Itt a lényegi kérdés az, hogy  $\nabla f(r) = 0$  milyen  $r$ -re áll fenn – ez egy szélsőértékkeresési problémaként is felfogható, hiszen  $f$  gradiensét vizsgáljuk. A természetes iteráció ötlete itt is felmerül:

$$r_{t+1} := Hr_t, \quad \text{vagy } r_{t+1} := (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t Hr_t,$$

ami (1) esetén pont a gradiens módszert adja vissza. Az elmélet szerint ekkor ha az algoritmus konvergál egy  $r^*$ -ba, és ha ott  $H$  folytonos, akkor  $Hr^* = r^*$ .

Azonban nekünk pontatlan méréseink vannak – azaz egy véletlen zaj adódik hozzá minden egyes iterációs lépésünkhöz:

$$s_{t+1} = Hr_t + w_t, \quad (2)$$

ahol  $w_t$  egy véletlen zaj – és ehhez az  $s_{t+1}$  vektorhoz van hozzáférésünk. Ezzel el is érkeztünk ahhoz, hogy definiálhassuk a sztochasztikus approximációs algoritmust:

**2.1. Definíció.** Tegyük fel, hogy  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $r_t, w_t \in \mathbb{R}^n$ , ahol  $w_t$  valós valószínűségi vektorváltozó,  $\gamma_t \in (0; 1)$ . Ekkor

$$r_{t+1} := (1 - \gamma_t) \cdot r_t + \gamma_t(Hr_t + w_t)$$

egy sztochasztikus approximáció, vagy sztochasztikus iteráció.

**2.2. Megjegyzés.** A véletlenszerű eltérés, azaz  $w_t$  mértéke – alkalmasan választott normában – függ  $\gamma_t$  megválasztásától. Ha  $\gamma_t$  kicsi, akkor a hiba mértéke is kicsi, azonban lassabb lesz az iteráció, mert több lépést kell megtenni. Ha  $\gamma_t$  nagy, akkor hamarabb véget ér az iteráció, azonban nagyobb lehet a hiba mértéke is. Erre kézenfekvő megoldás változó lépésközök megadása úgy, hogy a  $\gamma_t$  lépésközök 0-hoz tartanak, ahogy az algoritmus fut.

**2.3. Megjegyzés.** Legyen  $v \in \mathbb{R}^n$  egy valószínűségi vektorváltozó  $r$ -től függő  $Q_r$  eloszlással, és az

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

egyenletrendszert szeretnénk megoldani, ahol  $g$  egy ismert függvény. Ekkor a definíció alapján kézenfekvő a következő iteráció:

$$r_{t+1} := (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

Ha  $n > 1$ , akkor  $v$  vektorértékű változó, és így a jobboldalt szereplő integrál többdimenziós, amit nehéz lehet kiértékelni – feltéve, hogy egyáltalán ismerjük az eloszlást, ami szerint integrálnunk kéne. Azonban ha  $Q_r$  könnyen szimulálható, akkor elég lenne egy  $k$  elemű mintából vett  $\bar{v}$  átlagot számolni, és azzal becsülni  $\mathbb{E}[g(r_t, v)]$  értékét<sup>4</sup>.

Természetesen a szimulálás és mintagenerálás is lehet költséges eljárás – így érdemes lehet azt az extrém esetet venni, amikor  $k = 1$ , azaz

$$r_{t+1} := (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t g(r_t, \bar{v}_t), \quad (3)$$

ahol  $\tilde{v}_t$  a generált mintát jelöli – ez a Robbins-Monro algoritmus. Kis átalakítással átírható az alábbi formába:

$$r_{t+1} := (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t) = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t (Hr_t + w_t),$$

ahol  $Hr_t = \mathbb{E}[g(r_t, v_t)]$ ,  $w = g(r_t, \tilde{v}_t) - \mathbb{E}[g(r_t, v_t)]$ ,

vagyis abban az esetben, amikor van olyan  $g$  függvény és  $v$  valószínűségi változó, melyre  $Hr = E[g(r, v)]$ , akkor feltételezhető, hogy a zaj várható értéke 0.

## II-B. Alapmodell

Ahhoz, hogy az iterációt vizsgálni tudjuk, valahogy modelleznünk kell az iterációs lépéseket. Jelölje  $r^{(i)}, Hr^{(i)}, w^{(i)}, \gamma^{(i)}$  az  $r, Hr, w, \gamma$  vektorok  $i$ . koordinátáját ( $i = 1, \dots, n$ ). Jelölje  $t \in \mathbb{N}$  azt, hogy hanyadik iterációnál tart az algoritmus (a kezdeti állapotban legyen  $t = 0$ .), és  $r_t$   $r$  értékét a  $t$ . iterációban. Legyen  $T^{(i)} = \{t \in \mathbb{N} : r^{(i)} \text{ frissítődik}\}$ . Ekkor (3) átírható az alábbi alakba:

$$r_{t+1}^{(i)} = \begin{cases} (1 - \gamma_t^{(i)})r_t^{(i)} + \gamma_t^{(i)}(Hr_t^{(i)} + w_t^{(i)}), & \text{ha } t \in T^{(i)} \\ r_t^{(i)}, & \text{ha } t \notin T^{(i)} \end{cases}$$

Ennek az alaknak az a legnagyobb előnye, hogy megengedi, hogy  $r$  koordinátái közül ne mind frissüljön, és a lépésköz is változhat, akár koordinátánként is. A fenti alak egyszerűbbé tehető, ha  $w_t^{(i)}, \gamma_t^{(i)}$  minden  $t$ -re és  $i$ -re definiálva van, és  $\gamma_t^{(i)} = 0$ , ha az  $i$ . koordinátát épp nem szeretnénk frissíteni.

Meg kell fontolnunk a  $\gamma_t$  lépésközök mértékét is tetszőleges, de fix  $i$ -re. Ha a zaj,  $w_t^{(i)}$  független  $r_t^{(i)}$ -től és a szórása  $\sigma > 0$ , akkor  $r_{t+1}^{(i)}$  szórásnégyzete legalább  $(\gamma_t^{(i)})^2 \sigma^2$ . Legyen  $\gamma_t = \min_{i=1, \dots, n} \gamma_t^{(i)}$  – konvergencia pontosan akkor állhat fenn, ha  $\gamma_t^2 \rightarrow 0$ . Másrésztől viszont (3) alapján

$$\left| r_t^{(i)} - r_0^{(i)} \right| \leq \sum_{\tau=0}^{t-1} \gamma_\tau^{(i)} \left| Hr_\tau^{(i)} - r_\tau^{(i)} + w_\tau^{(i)} \right|,$$

vagyis ha a jobboldalon levő távolság korlátos, és  $\sum_{\tau=0}^{\infty} \gamma_\tau^{(i)} < \infty$ , akkor az algoritmus  $r_0$  egy fix környezetében marad – ha  $r^*$  ezen kívül van, akkor a konvergencia lehetetlen. Így érdemes tetszőleges  $i$ -re az alábbi megkötésekkel élni:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t^{(i)} = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma_t^{(i)})^2 < \infty$$

Jelölje továbbá  $\mathcal{F}_t$  az iterációs algoritmus során történeteket egészen addig, amíg  $\gamma_t^{(i)}$  ki nem lett választva, de még nem történt meg a frissítés, azaz

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{r_0^{(i)}, \dots, r_t^{(i)}, w_0^{(i)}, \dots, w_{t-1}^{(i)}, \gamma_0^{(i)}, \dots, \gamma_t^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$$

egy filtráció, mely az algoritmus múltjáról tartalmaz minden információt egészen addig a pillanatig, amíg a  $t$ . lépésközöket meg nem választjuk valahogy.

## III. SZTOCHASZTIKUS GRADIENS MÓDSZEREK

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$s_t = Hr_t - r_t + w_t \Rightarrow r_{t+1} = r_t + \gamma_t s_t \quad (4)$$

Az általánosság elvesztése nélkül<sup>2</sup> feltesszük, hogy tetszőleges  $t$  esetén

$$\gamma_t^{(1)} = \gamma_t^{(2)} = \dots = \gamma_t^{(n)},$$

továbbá jelölje  $\|\cdot\|$  az  $\mathbb{R}^n$ -beli euklideszi normát. A fenti jelöléssel

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{r_0, \dots, r_t, s_0, \dots, s_{t-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_t\}$$

**3.1. Megjegyzés.** Ha szükséges, akkor további információkat is eltárolhatunk  $\mathcal{F}_t$ -ben.

Az alábbi tételt ismertem meg véges dimenziós esetben:

**3.2. Tétel.** Tegyük fel, hogy  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{N}} > 0$ , továbbá

$$(a) \quad \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t < \infty$$

$$(b) \quad \forall r \in \mathbb{R}^n : f(r) \geq 0$$

$$(c) \quad f \text{ Lipschitz-folytonos, azaz } \exists L \geq 0, \text{ hogy } \forall r, s \in \mathbb{R}^n :$$

$$\|\nabla f(r) - \nabla f(s)\| \leq L\|r - s\|$$

$$(d) \quad \exists c > 0, \text{ hogy } \forall t \in \mathbb{N} :$$

$$c \cdot \|\nabla f(r_t)\|^2 \leq \langle -\nabla f(r_t), \mathbb{E}[s_t | \mathcal{F}_t] \rangle$$

$$(e) \quad \exists K_1, K_2 > 0, \text{ hogy } \forall t \in \mathbb{N} :$$

$$\mathbb{E}[\|s_t\|^2 | \mathcal{F}_t] \leq K_1 + K_2 \|\nabla f(r_t)\|^2$$

Ekkor az alábbiak 1 valószínűséggel igazak az  $r_{t+1} = r_t + \gamma_t s_t$  iterációra:

$$(1) \quad \text{Az } f(r_t) \text{ sorozat konvergens,}$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nabla f(r_t) = 0,$$

$$(3) \quad r_t \text{ torlódási pontjai stacionárius pontjai } \nabla f\text{-nek.}$$

A tétel nem nyilatkozik  $r_t$  konvergenciájáról, azonban ha  $f$  szinthalmaizai korlátosak, akkor (1)-ből következően az  $r_t$  sorozat is korlátos. Ha ezenfelül  $f$ -nek csak  $r^*$ -ban van stacionárius pontja, akkor  $r_t$ -nek csak  $r^*$ -ban van torlódási pontja, azaz  $r_t$  konvergál  $r^*$ -ba.

Ennek egyik legfontosabb következménye a sztochasztikus gradiens módszerek konzisztenciája. Tekintsük az

$$r_{t+1} = r_t - \gamma_t (\nabla f(r_t) + w_t) \quad (5)$$

iterációt, mellyel az  $f$  költségfüggvényt szeretnénk minimalizálni. Tegyük fel, hogy  $f$  szinthalmazai korlátosak, és  $f$ -nek csak egy stacionárius pontja van. Ekkor (4)-ben

$$s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$

Feltesszük, hogy a fenti tétel feltételei teljesülnek, továbbá azt, hogy minden  $t \in \mathbb{N}$  esetén

$$\mathbb{E}[w_t | \mathcal{F}_t] = 0, \quad (6)$$

$$\mathbb{E}[\|w_t\|^2 | \mathcal{F}_t] \leq A + B\|\nabla f(r_t)\|^2 \quad (7)$$

valamilyen  $A, B$  pozitív konstansokra. Ekkor (7), (8) alapján

$$\begin{aligned} \langle -\nabla f(r_t), \mathbb{E}[s_t | \mathcal{F}_t] \rangle &= \langle -\nabla f(r_t), -\nabla f(r_t) - \mathbb{E}[w_t | \mathcal{F}_t] \rangle = \\ &= \langle \nabla f(r_t), \nabla f(r_t) \rangle = \|\nabla f(r_t)\|^2, \\ \mathbb{E}[\|s_t\|^2] &= \\ \|\nabla f(r_t)\|^2 + \mathbb{E}[\|w_t\|^2 | \mathcal{F}_t] + 2\langle \nabla f(r_t), \mathbb{E}[w_t | \mathcal{F}_t] \rangle &\leq \\ \|\nabla f(r_t)\|^2 + A + B\|\nabla f(r_t)\|^2, \end{aligned}$$

vagyis  $c = 1$ ,  $K_1 = A$ ,  $K_2 = B + 1$  konstansokkal teljesülnek a tétel feltételei, hiszen  $\mathcal{F}_t$  teljesen meghatározza  $\nabla f(r_t)$  értékét, így azt kiemelhetjük a feltételes várható értékből.

Így a megadott feltételek alapján kimondhatjuk, hogy a sztochasztikus gradiens módszer konzisztens.

#### IV. NÉHÁNY HILBERT-TÉRBELI EREDMÉNY

Miután megismertem a sztochasztikus approximációt, azt tanulmányoztam, hogy hogyan lehet Hilbert-terekben kimondani és bebizonyítani sztochasztikus approximációról szóló tételeket:<sup>3</sup>

Legyen a fejezet során  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in [0; 1)$ ,  $a_n \rightarrow 0$ , de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ , továbbá tetszőleges  $n$ -re

$$\beta_n = \frac{1}{(1 - a_n) \cdot (1 - a_1)}, \quad \gamma_n = a_n \beta_n$$

**4.1. Tétel.** Legyen  $\mathcal{H}$  egy Hilbert-tér,  $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  alulról korlátos és legyen a Fréchet-deriváltja  $DF$ , továbbá  $X_n, W_n, H_n, V_n \in \mathcal{H}$  tetszőleges  $n$ -re úgy, hogy

$$X_{n+1} = X_n - a_n(DF(X_n) - W_n), \quad W_n = H_n + V_n$$

Tegyük fel, hogy

(a)  $DF$  Lipschitz, azaz

$$\exists K > 0: \forall x, y \in \mathcal{H}: \|DF(x) - DF(y)\| \leq K\|x - y\|$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|H_n\|^2 < \infty$$

(c)

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \gamma_k V_k \rightarrow \infty$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \left\| \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \gamma_k V_k \right\|^2 < \infty$$

Ekkor  $F(X_n)$  konvergens,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|DF(X_n)\|^2 < \infty$  és  $DF(X_n) \rightarrow 0$ .

Ezt a tételt hasonlóan találtam az előző fejezetben kimondott tételhez – azzal az egy eltéréssel, hogy skalárszorzatok helyett konvergenciákat ad meg feltételként. Az alábbi tételnek pedig egy speciális esete a Robbins-Monro algoritmus (azaz  $H_n = 0$ , és  $-V_n$  a véletlenszerű hiba  $f(X_n)$  megfigyelésében, mérésében):

**4.2. Tétel.** Legyen  $\mathcal{H}$  egy valós, szeparábilis Hilbert-tér a Borel  $\sigma$ -algebrával ellátva, és  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető. Tegyük fel, hogy  $\vartheta \in \mathcal{H}$ ,  $X_n, W_n, H_n, V_n$   $\mathcal{H}$ -értékű valószínűségi változók úgy, hogy

$$X_{n+1} = X_n - a_n(f(X_n) - W_n), \quad W_n = H_n + V_n,$$

ahol  $a_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ , továbbá

(a)

$$\exists c > 0: \forall x \in \mathcal{H}: \|f(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$$

(b)

$$\forall K \geq 1: \inf\{\langle f(x), x - \vartheta \rangle | x \in \mathcal{H}, \frac{1}{K} \leq \|x - \vartheta\| \leq K\} > 0$$

(c)  $\forall n \in \mathbb{N}$   $H_n, V_n$  négyzetesen integrálhatóak, és

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\|H_n\| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E}\|H_n\|^2 < \infty, \\ \mathbb{E}(V_n | X_1, H_1, V_1, \dots, H_{n-1}, V_{n-1}) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E}\|V_n\|^2 < \infty \end{aligned}$$

Ekkor  $X_n \rightarrow \vartheta$  1 valószínűséggel.

Ljung és Pflug megemlíti a tétel kimondása során, hogy általában  $f(\vartheta) = 0$  fennáll, de ez korántsem szükséges feltétel.

#### V. KONKLÚZIÓ, JÖVŐBELI TERVEK

A félév során betekintést nyertem a sztochasztikus approximációról szóló tételek világába, a sztochasztikus gradiens módszerre fókuszálva. Témavezetőmmel együtt igyekeztem megérteni, milyen problémák, változások lépnek fel akkor, amikor egy  $\mathbb{R}^n$  vektortér helyett egy (szeparábilis, valós) Hilbert-térben szeretnénk sztochasztikus approximációs módszerekről nyilatkozni. Láttam, látom, hogy ez egy számomra kihívásokkal teli, bonyolult, de szép, és izgalmas területe a matematikának.

Jelenlegi fókuszom a *III.* fejezetben kimondott tétel általánosítása az eddigi kutatómunkám alapján – majd annak vizsgálata, hogy az általánosított tételből milyen következtetések vonhatóak le a sztochasztikus gradiens módszerről Hilbert-terekben.

#### REFERENCES

- [1] D. P. BERTSEKAS - J. N. TSITSIKILIS *Neuro-Dynamic Programming*, p. 132-142 (Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1996)
- [2] D. P. BERTSEKAS - J. N. TSITSIKILIS *Neuro-Dynamic Programming*, p. 139 (Athena Scientific, 1996)
- [3] L. JUNG - G. PFLUG - H. WALK *Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems*, p. 1-22 (Springer, 1992)
- [4] SZEPESVÁRI CSABA *A Unified Analysis of Value-Function-Based Reinforcement-Learning Algorithms*, p. 8 <https://sites.ualberta.ca/~szepesva/papers/nc-97-gmdp.ps.pdf>
- [5] VIVEK S. BORKAR *Stochastic Approximation, A Dynamical Systems Viewpoint* (Springer, 2008)
- [6] H. KUSHNER, G. G. YIN *Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications* (Springer, 2. kiadás, 2003)