

Egyéni kutatómunka 1. Sztochasztikus Approximáció Hilbert-terekben

Monos Attila
Témavezető: Dr. Csáji Balázs Csanád

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2022. december 22.

- Iterálni szeretnénk, azonban az adataink nem pontosak

- Iterálni szeretnénk, azonban az adataink nem pontosak
- Mérési hiba, mérési zaj – véletlenszerű zajként kezeljük

- Iterálni szeretnénk, azonban az adataink nem pontosak
- Mérési hiba, mérési zaj – véletlenszerű zajként kezeljük
- Iterációs módszerek vizsgálatánál számolni kell a zajjal

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust
- Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust
- Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája
- Hilbert-térre való átültetésekre pár példa

- Megismertem egy alapvető sztochasztikus iterációs algoritmust
- Sztochasztikus gradiens módszer konzisztenciája
- Hilbert-térre való átültetésekre pár példa
- Egy tétel átültetése (*folymatban*)

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

- Speciális eset:

$$H(r) = r - \nabla f(r)$$

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

- Speciális eset:

$$H(r) = r - \nabla f(r)$$

- Iterációs algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t H(r_t)$$

- Az alábbi egyenletet szeretnénk megoldani:

$$r \in \mathbb{R}^n, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad H(r) = r,$$

ahol H egy tetszőleges mérhető függvény

- Speciális eset:

$$H(r) = r - \nabla f(r)$$

- Iterációs algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t H(r_t)$$

- Véletlen zaj ehhez az iterációs lépéshez adódik hozzá, így megkapjuk a sztochasztikus iterációt:

- Tfh. $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, $r_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^n$ valós valószínűségi vektorváltozó. Ekkor az

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t(H(r_t) + w_t)$$

algoritmus *sztochasztikus iteráció (approximáció)*.

- Tfh. $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, $r_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^n$ valós valószínűségi vektorváltozó. Ekkor az

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t(H(r_t) + w_t)$$

algorithmus *sztochasztikus iteráció (approximáció)*.

- γ_t megválasztása izgalmas kérdés
- Érdemes változó lépésközöket alkalmazni úgy, hogy $\gamma_t \rightarrow 0$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r -től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r -től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r -től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r -t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r -től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r -t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük
- Robbins-Monro algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t)$$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r -től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r -t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük
- Robbins-Monro algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t)$$

-

$$H(r_t) = \mathbb{E}[g(r_t, v_t)], \quad w_t = g(r_t, \tilde{v}_t) - \mathbb{E}[g(r_t, v_t)]$$

Alapmodell III.

- $v \in \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó r -től függő Q_r eloszlással, és a megoldandó problémánk:

$$\mathbb{E}[g(r, v)] = r$$

Egy ismert g függvénnyel.

- Erre kézenfekvő iteráció:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t \mathbb{E}[g(r_t, v)]$$

- Sok múlik azon, hogy ismerjük-e Q_r -t, és az mennyire könnyen számolható, ha ismerjük
- Robbins-Monro algoritmus:

$$r_{t+1} = (1 - \gamma_t)r_t + \gamma_t g(r_t, \tilde{v}_t)$$

-

$$H(r_t) = \mathbb{E}[g(r_t, v_t)], \quad w_t = g(r_t, \tilde{v}_t) - \mathbb{E}[g(r_t, v_t)]$$

- Ha van ilyen forma, akkor feltehető, hogy $\mathbb{E}(w_t) = 0$

- Ha $\gamma_t^2 \not\rightarrow 0$, akkor nem biztos, hogy betartunk az r^* megoldásba

A Tétel I.

- Ha $\gamma_t^2 \not\rightarrow 0$, akkor nem biztos, hogy betartunk az r^* megoldásba
- Viszont ha $s_t = H(r_t) - r_t + w_t$ korlátos, akkor korlátos halmazban mozoghatunk

- Ha $\gamma_t^2 \not\rightarrow 0$, akkor nem biztos, hogy betartunk az r^* megoldásba
- Viszont ha $s_t = H(r_t) - r_t + w_t$ korlátos, akkor korlátos halmazban mozoghatunk
- Feltéve, hogy minden $t \in \mathbb{N}$ -re γ_t koordinátái megegyeznek, filtráció:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{r_0, \dots, r_t, s_0, \dots, s_{t-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_t\}$$

Theorem

Tegyük fel, hogy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{N}} > 0$, továbbá

- 1 $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty$, $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t^2 < \infty$
- 2 $\forall r \in \mathbb{R}^n: f(r) \geq 0$
- 3 ∇f Lipschitz-folytonos, azaz $\exists L \geq 0$, hogy $\forall r, s \in \mathbb{R}^n$:
 $\|\nabla f(r) - \nabla f(s)\| \leq L\|r - s\|$
- 4 $\exists c > 0$, hogy $\forall t \in \mathbb{N}: c \cdot \|\nabla f(r_t)\|^2 \leq \langle -\nabla f(r_t), \mathbb{E}[s_t | \mathcal{F}_t] \rangle$
- 5 $\exists K_1, K_2 > 0$, hogy $\forall t \in \mathbb{N}: \mathbb{E}[\|s_t\|^2 | \mathcal{F}_t] \leq K_1 + K_2 \|\nabla f(r_t)\|^2$

Ekkor az alábbiak 1 valószínűséggel igazak az $r_{t+1} = r_t + \gamma_t s_t$ iterációra:

- 1 Az $f(r_t)$ sorozat konvergens,
- 2 $\lim_{t \rightarrow \infty} \nabla f(r_t) = 0$,
- 3 r_t torlódási pontjai stacionárius pontjai ∇f -nek.

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^* -ban stacionárius, akkor $r_t \rightarrow r^*$ 1 valószínűséggel

- Ha f szinthalmaizai korlátosak, és f csak r^* -ban stacionárius, akkor $r_t \rightarrow r^*$ 1 valószínűséggel



$$r_{t+1} = r_t - \gamma_t(\nabla f(r_t) + w_t) \Rightarrow s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^* -ban stacionárius, akkor $r_t \rightarrow r^*$ 1 valószínűséggel



$$r_{t+1} = r_t - \gamma_t(\nabla f(r_t) + w_t) \Rightarrow s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$

- Feltesszük még:

$$\mathbb{E}[w_t | \mathcal{F}_t] = 0, \quad \mathbb{E}[\|w_t\|^2 | \mathcal{F}_t] \leq A + B\|\nabla f(r_t)\|^2$$

- Ha f szinthalmazai korlátosak, és f csak r^* -ban stacionárius, akkor $r_t \rightarrow r^*$ 1 valószínűséggel



$$r_{t+1} = r_t - \gamma_t(\nabla f(r_t) + w_t) \Rightarrow s_t = -\nabla f(r_t) - w_t$$

- Feltesszük még:

$$\mathbb{E}[w_t | \mathcal{F}_t] = 0, \quad \mathbb{E}[\|w_t\|^2 | \mathcal{F}_t] \leq A + B\|\nabla f(r_t)\|^2$$

- Alábbi választásokkal a tétel alkalmazható:

$$c = 1, \quad K_1 = A, \quad K_2 = B + 1$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0; 1)$, $a_n \rightarrow 0$, de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, továbbá tetszőleges n -re

$$\beta_n = \frac{1}{(1 - a_n) \cdot (1 - a_1)}, \quad \gamma_n = a_n \beta_n$$

Theorem

Legyen \mathcal{H} egy Hilbert-tér, $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ alulról korlátos és legyen a Fréchet-deriváltja DF , továbbá $X_n, W_n, H_n, V_n \in \mathcal{H}$ tetszőleges n -re úgy, hogy

$$X_{n+1} = X_n - a_n(DF(X_n) - W_n), \quad W_n = H_n + V_n$$

Tegyük fel, hogy

1 DF Lipschitz, azaz

$$\exists K > 0: \forall x, y \in \mathcal{H}: \|DF(x) - DF(y)\| \leq K\|x - y\|$$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|H_n\|^2 < \infty$

3 $\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \gamma_k V_k \rightarrow \infty$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \left\| \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \gamma_k V_k \right\|^2 < \infty$

Ekkor $F(X_n)$ konvergens, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|DF(X_n)\|^2 < \infty$ és $DF(X_n) \rightarrow 0$.

Theorem

Legyen \mathcal{H} egy valós, szeparábilis Hilbert-tér a Borel σ -algebrával ellátva, és $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mérhető. Tegyük fel, hogy $\vartheta \in \mathcal{H}$, X_n, W_n, H_n, V_n \mathcal{H} -értékű valószínűségi változók úgy, hogy $X_{n+1} = X_n - a_n(f(X_n) - W_n)$, $W_n = H_n + V_n$, ahol $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, továbbá

- 1 $\exists c > 0: \forall x \in \mathcal{H}: \|f(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$
- 2 $\forall K \geq 1: \inf\{\langle f(x), x - \vartheta \rangle \mid x \in \mathcal{H}, \frac{1}{K} \leq \|x - \vartheta\| \leq K\} > 0$
- 3 $\forall n \in \mathbb{N} H_n, V_n$ négyzetesen integrálhatóak, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\|H_n\| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E}\|H_n\|^2 < \infty,$$

$$\mathbb{E}(V_n \mid X_1, H_1, V_1, \dots, H_{n-1}, V_{n-1}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E}\|V_n\|^2 < \infty$$

Ekkor $X_n \rightarrow \vartheta$ 1 valószínűséggel.

- D. P. Bertsekas - J. N. Tsitsikilis *Neuro-Dynamic Programming*, p. 132-142 (Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1996)
- L. Jung - G. Pflug - H. Walk *Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems*, p. 1-22 (Springer, 1992)
- Cs. Szepesvári, M. Littmann *A Unified Analysis of Value-Function-Based Reinforcement-Learning Algorithms*, p. 8 (Neural Computation (1999) 11 (8): 2017–2060)
- Vivek S. Borkar *Stochastic Approximation, A Dynamical Systems Viewpoint* (Springer, 2008)
- H. Kushner, G. G. Yin *Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications* (Springer, 2. kiadás, 2003)