A TOPOLOGIKUS ELSŐ ÁTHALADÁSI PERKOLÁCIÓ EGY FOLYTONOS MODELLJE

SZEPESSY LUCA

Témavezető: Maga Balázs

Kivonat. Az első áthaladási perkoláció elméletét 1965-ben alkotta meg Hammersley és Welsh: céljuk folyadékok porózus közegen történő átszivárgásának modellezése volt a valószínűségszámítás eszközeivel. Az elmélet topologikus variánsát úgy nyerjük, hogy a valószínűségi mértékről "elfeledkezve" az áthaladási időkből nyert konfigurációs téren a szorzattopológia vizsgálatára szorítkozunk.

1. Bevezetés

Az első áthaladási perkoláció elméletét folyadékok porózus, azaz lyukacsos anyagon történő átszivárgásának modellezésére hozták létre. A klasszikus modellben a porózus közeg a $\mathbb{Z}^d$ rács, ahol a pontok közt a rácsvonalak mentén lehet közlekedni, az élek áthaladási idejét pedig valószínűségi változók írják le. Az elmélet topologikus variánsában az áthaladási időkből nyert konfigurációs téren vizsgáljuk a szorzattopológiát, ezzel mintegy az összes esetet egyformán vizsgálva. Itt a vizsgálódás sztenderd tárgya az, hogy a valószínűségi elmélet klasszikus 0-1 törvényei hogyan fordíthatók le Baire-kategória nyelvére, ebben az értelemben mi a generikus viselkedés. Jelen kutatómunkám a témavezetőm, Maga Balázs azon ötletével foglalkozik, hogy vajon mi történik, ha a $\mathbb{Z}^d$ rácsot $\mathbb{R}^d$-re cseréljük. Ez az [1]-[2] cikkekben bevezetett topologikus perkoláció egy folytonos analógja. A tér pontjai közt $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ folytonos görbék mentén lehet közlekedni. Az áthaladási időket a $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ függvénytér elemei írják le: $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ esetén a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ görbe áthaladási ideje $T_f(\gamma) = \int\limits_0^1 f(\gamma(t))\,dt$. A nemnegativitás miatt ez értelmes, de végtelen is lehet. Eszerint két pont távolsága a köztük vezető utak áthaladási idejeinek infimuma: $T(x,y) = \inf\limits_{\gamma \in G_{x,y}} T_f(\gamma)$, ahol $G_{x,y} = \{\gamma : \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d \text{ folytonos}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$. Az áthaladási idők $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ függvényterét a lokálisan egyenletes konvergencia által indukált topológiával tesszük topologikus térré, és ezzel lengyel teret kapunk.

1. Definíció (Lokálisan egyenletes konvergencia)**.** *Legyen* (T, τ) *topologikus,* (M, d) *pedig metrikus tér. Legyen* $f, f_n \in C(T, M)$ $\forall n$*-re. Ekkor* $f_n \to f$ *lokálisan egyenletesen, ha minden* $x \in T$ *pontnak van olyan* U *környezete, melyen* $f_n|_U \to f|_U$ *egyenletesen.*

1. Megjegyzés. *Ha a* (T, τ) *tér lokálisan kompakt, akkor a lokálisan egyenletes konvergencia pontosan azt jelenti, hogy a* T *minden* K *kompakt halmazán* $f_n|_K \to f|_K$ *egyenletesen.* $\mathbb{R}^d$ *lokálisan kompakt.*

1. Állítás. $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ *a lokálisan egyenletes konvergencia topológiájával lengyel tér.*

Bizonyítás. Adunk egy metrikát, mely a lokálisan egyenletes konvergencia topológiáját indukálja és teljes, majd ennek segítségével megmutatjuk, hogy a tér szeparábilis.

$$d(f, g) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \min\{\sup_{x \in K_i}(|f(x) - g(x)|), 1\},$$

ahol $K_i = \overline{B_d}(\mathbf{0}, i)$ az $i \in \mathbb{N}$ sugarú, origó középpontú zárt gömb $\mathbb{R}^d$-ben.
Ez metrika. Könnyű látni, hogy d metrika: a háromszög-egyenlőtlenség a sorok átrendezhetőségén múlik, minden más teljesen nyilvánvaló.
A metrika a megfelelő konvergenciát indukálja. A metrika szerinti konvergencia: $f_n \to f \Leftrightarrow d(f_n, f) \to 0 \Leftrightarrow \forall K_i$-n $f_n \to f$ egyenletesen $\Leftrightarrow$ minden kompakt halmazon $f_n \to f$ egyenletesen. Tehát a metrika valóban a lokálisan egyenletes konvergenciát adja.
A metrika teljes. Ha $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy, akkor minden kompakt halmazon is Cauchy, tehát egyenletesen konvergens is, így összességében lokálisan egyenletesen konvergens.
A d *által indukált topológiával* $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ *szeparábilis.* Ismert tény, hogy $C(K, \mathbb{R}^{>0})$ lengyel, így szeparábilis, ahol K tetszőleges kompakt tér. Jelölje S_i' a $C(K_i, \mathbb{R}^{>0})$ tér egy megszámlálható, sűrű részhalmazát. S_i' elemeit terjesszük ki $\mathbb{R}^d$-re folytonosan: $f(x) := f(\frac{x}{||x||} \cdot i)$, ha $x \notin K_i$, így kapjuk az $S_i \subset C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ halmazokat. Legyen $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, ez megszámlálható. Emellett minden nyíltba belemetsz, vegyünk ennek belátásához tetszőleges $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ függvényt és $\varepsilon > 0$-t. Legyen n olyan, hogy $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $\exists g \in S_n$, melyre f és g távolsága K_n-en $< \frac{\varepsilon}{2}$, így $d(f, g) < \varepsilon$. □

A modell felépítése után a véges geodetikusok kérdésével foglalkoztam. Ezek olyan utak, melyeken felvétetik a két végpontjuk távolsága.

2. Véges geodetikusok

Bár két pont távolságát természetes módon tudtuk definiálni a modellünkben, az azonban egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy két pont közt létezik-e olyan út, melyen ez a távolság felvétetik. Elképzelhető például, hogy az áthaladási időket leíró f folytonos függvény annyira gyorsan csökken, ahogy távolodunk a két pontunktól, hogy megéri egyre hosszabb és hosszabb, végtelenbe tartó ívhosszú görbék mentén közlekedni köztük. Megmutatjuk azonban, hogy Baire-kategória értelemben a tipikus f függvényre azért létezni fog véges geodetikus két rögztett pont közt.

1. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}^d$ fix pontpárra generikusan létezik véges geodetikus.*

Bizonyítás. A célunk, hogy generikusan mindig találjuk $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma_i(0) = x$, $\gamma_i(1) = y$ görbék egy sorozatát, melyek áthaladási ideje az áthaladási idők infimumához tart, a görbék pedig egy folytonos görbéhez konvergálnak.
Ehhez először azt fogjuk belátni, hogy $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ pontpárra teljesül, hogy azon $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ függvények, melyekre $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $T(x,y)$ kisebb mint bármely olyan $x - y$ út áthaladási ideje, mely elhagyja $B_d(\mathbf{0}, K)$-et, sűrű és nyílt halmazt alkotnak $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$-ben. Ezután belátjuk, hogy ilyen függvények esetén mindig létezik véges geodetikus x és y közt. Mivel $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ lengyel tér, így Baire-tér is, vagyis minden sűrű nyílt halmaz reziduális, és pont erre van szükségünk.

2. Állítás. *Jelölje $A_{x,y}$ azon $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ függvények halmazát, melyekre $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $T(x,y)$ kisebb mint bármely olyan $x - y$ út áthaladási ideje, mely elhagyja $B_d(\mathbf{0}, K)$ gömböt. Ekkor $A_{x,y}$ nyílt, és sűrű $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$-ben.*

Bizonyítás. A sűrűséghez elég belátni, hogy a 0-tól szigorúan elválasztott függvények sűrű halmazt alkotnak. Vegyünk ehhez egy tetszőleges f függvényt, mely nem ilyen, azaz amire $\inf f = 0$. Be kell látni, hogy f tetszőleges $\varepsilon > 0$ sugarú környezetében van olyan $g \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$, melyre $\inf g > 0$. Legyen $g = f + \varepsilon$. Ekkor egyrészt $\inf g \geq \varepsilon$, másrészt $d(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \varepsilon = \varepsilon$.
A nyíltsághoz arra van szükségünk, hogy tetszőleges $f \in A_{x,y}$ esetén $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall g : d(f,g) < \varepsilon$ függvényre $g \in A_{x,y}$.
Feltehető, hogy az f függvényre létező K_f sugár olyan, hogy a $B_d(\mathbf{0}, K_f)$ gömböt elhagyó $x \to y$ utak áthaladási idejeinek M_f infimuma legalább δ-val több $T_f(x,y)$-nál, ahol $\delta > 0$.

Ha ugyanis ez nem teljesülne, K_f-et tetszőleges pozitív számmal megnövelve már találnánk δ-t, amire teljesülne. Legyen $\varepsilon = \frac{\delta}{3 \cdot 2^C}$, ahol $C = \lceil K_f \rceil \cdot 2$, g pedig f-től legfeljebb ε távolságra levő függvény. Mivel $T_g(x,y) \leq T_f(x,y) + \varepsilon \cdot 2^C$, valamint $M_g \geq M_f - \frac{\delta}{3}$, így $K_g = K_f$ jó választás. □

3. Állítás. *Ha $f \in A_{x,y}$, akkor létezik véges geodetikus x és y közt.*

Bizonyítás. A célunk, hogy találjuk $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma_i(0) = x$, $\gamma_i(1) = y$ görbék egy sorozatát, melyek áthaladási ideje $T(x,y)$-hoz tart, a görbék pedig egy folytonos görbéhez konvergálnak. Ennek belátásához a következő, ismert tételt fogjuk használni.

2. Tétel (Arzelà-Ascoli)**.** *Legyen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ függvények egy sorozata. Tegyük fel, hogy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra az alábbi két tulajdonság teljesül:*

- *egyenletesen korlátos: $\exists M : \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^d\ |f_n(x)| \leq M$*
- *egyenletesen ekvifolytonos: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, ha $|x - y| < \delta$*

Ekkor a sorozatnak létezik egyenletesen konvergens részsorozata.

Vegyük $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma_i(0) = x$, $\gamma_i(1) = y$ folytonos görbék egy sorozatát, melyre $\int\limits_{t=0}^{t=1} \gamma(t)\,dt \to T(\gamma)$. Belátjuk, hogy ekkor $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátos, valamint feltehető, hogy egyenletesen ekvifolytonos. Ekkor a tétel szerint létezik $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ folytonos görbe, melyhez egyenletesen konvergál a γ_i sorozat valamely részsorozata. Ekkor $T(x,y) = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 \gamma_i(t)\,dt = \int\limits_0^1 \gamma(t)\,dt$, tehát γ geodetikus x és y közt.

Egyenletes korlátosság. Következik abból, $f \in A_{x,y}$.

Egyenletes ekvifolytonosság. Belátjuk, hogy a γ_i görbéket átparaméterezhetjük úgy, hogy az egyenletes ekvifolytonosság feltétele teljesüljön rájuk.

Jelölje a γ_i ívhosszát $l_i \in \mathbb{R}$, az l_i ívhosszak egy közös felső korlátját pedig L; a feladatból adódóan $L < \infty$. Legyen $\gamma_i' : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ az a görbe, melyet a következőképpen kapunk γ_i-ből: $\forall k, n \in \mathbb{N}, k \leq 2^n$-re legyen $\gamma_i'(\frac{k}{2^n}) = \gamma_i(x_{i,k,n})$, ahol $x_{i,k,n} \in [0,1]$ az a pont, melyre $\gamma_i|_{[0,x_{i,k,n}]}$ ívhossza éppen $l_i \cdot \frac{k}{2^n}$. Ezután terjesszük ki a már definiált pontokhoz képest $[0,1]$-re γ_i'-t folytonosan. Ez a kiterjesztés γ_i folytonossága miatt egyértelműen létezik.

A kapott γ_i' görbék már egyenletesen ekvifolytonosak: ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor találhatunk $N \in \mathbb{N}$ számot, melyre $\frac{L}{2^N} < \varepsilon$, és ezzel $\delta = \frac{1}{2^N}$ jó választás.

□

Tehát egy reziduális függvényhalmazon találtunk véges geodetikust x és y közt, ezzel a tételt beláttuk. □

Egy kis erősítéssel többet is beláthatunk.

3. Tétel. *A generikus $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$ függvény olyan, hogy $\mathbb{R}^d$ bármely két pontja közt létezik véges geodetikus.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy ha $f \in A_{x,y}$, akkor $\forall x', y'$ párra, ahol x' és y' x, illetve y elég kis környezetében vannak, $f \in A_{x',y'}$. Ekkor – mivel $\mathbb{R}^{2d}$ Lindelöf – elég lesz megszámlálhatóan sok $A_{x,y}$-t összemetszeni ahhoz, hogy megkapjuk azon függvények halmazát, melyekre bármely két pont közt van véges geodetikus.

1. Lemma. *Jelölje G a $[0,1] \to \mathbb{R}^d$ folytonos utak halmazát, a szuprémum-metrikával ellátva. Ekkor a $H_f : G \to \mathbb{R}$, $H(\gamma) = T_f(\gamma)$ hozzárendelés folytonos.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ esetén ha $T_f(\gamma) = r$, akkor γ egy kis környezetében található minden γ' útra $T_f(\gamma') \subset (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Osszuk fel a γ görbét szakaszokra, úgy, hogy minden szakaszon f s szuprémumának és i infimumának különbsége legfeljebb $\frac{\varepsilon}{4}$ legyen. Minden szakasznak vegyük egy pici zárt környezetét, úgy, hogy azon f szuprémuma és infimuma legfeljebb $\frac{\varepsilon}{4}$-gyel térjen el s-től, illetve i-től. Mivel véges sok szakasz van, vehetjük a legkisebb δ-t, amely sugarú környezetet választottunk a szakaszokhoz. Ekkor γ δ-sugarú nyílt környezete jó lesz. □

Tehát bármely x, y párra $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x' \in B_d(x, \delta), y' \in B_d(y, \delta)$ párra $A_{x,y} \subset A_{x',y'}$. A $B_d(x, \delta) \times B_d(y, \delta)$ halmazok egy nyílt fedését adják $(\mathbb{R}^d)^2$-nek, így kiválasztható belőlük megszámlálhatóan sok, mely továbbra is fed. A kiválasztott gömbök x_i, y_i középpontpárjaira $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_{x_i,y_i}$ egy olyan függvényhalmaz lesz, mely elemeire teljesül, hogy bármely két pont közt van szerintük vett véges geodetikus. Korábban meggondoltuk, hogy A_{x_i,y_i} halmazok sűrű nyíltak $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{>0})$-ben, tehát a komplementerük sehol sem sűrű. Így $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_{x_i,y_i}$ komplementere sehol sem sűrű halmazok megszámlálható uniója, tehát első kategóriájú. Ez éppen azt jelenti, hogy $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_{x_i,y_i}$ reziduális. □

Bebizonyítottuk tehát, hogy a modellünk szép: a legtöbb áthaladásiidő-függvény szerint bármely két pont közt létezik véges geodetikus.

A modellel kapcsolatban még sokmindent lehetne vizsgálni: a klasszikus esethez hasonlóan az időkonstans és határalakzat kérdése például biztosan érdekes.

Hivatkozások

[1] B. Maga, Baire categorical aspects of first passage percolation, Acta Math. Hungar. 156 (1) (2018), 145-171. https://doi.org/10.1007/s10474-018-0840-9

[2] B. Maga, Baire categorical aspects of first passage percolation II., Acta Math. Hungar. 159 (2019), 447–485. https://arxiv.org/abs/1811.06483