Véges test fölötti szeparáló invariánsok vizsgálata (2)

SEPARATING INVARIANTS OVER FINITE FIELDS (KEMPER, LOPATIN, REIMERS)

című cikk nyomán

Készítette: Miklósi Roland Botond
Témavezető: Domokos Mátyás

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Áttekintés

Visszatekintés

- *egyéni kutatómunka 1*: Gregor Kemper, Artem Lopatin, Fabian Reimers - Separating Invariants Over Finite Fields $\rightarrow$ sejtés $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$;
- *egyéni kutatómunka 2*: a sejtés bizonyítása, részeredmények az általános $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ esetben;

Visszatekintés

- *egyéni kutatómunka 1*: Gregor Kemper, Artem Lopatin, Fabian Reimers - Separating Invariants Over Finite Fields $\rightarrow$ sejtés $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$;
- *egyéni kutatómunka 2*: a sejtés bizonyítása, részeredmények az általános $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ esetben;

Definíciók (ismétlés)

- V n-dimenziós vektortér $\mathbb{F}$ fölött, koord. gyűrű n-változós polinomgyűrű, $G \leq GL(V)$ véges részcsoportra $\rightarrow \mathbb{F}[V]^G$ *invariánsgyűrű*;
- $S \subset \mathbb{F}[V]^G$ *szeparálórendszer*, ha $u, v \in V$ vektorok szeparálhatóak $\mathbb{F}[V]^G$ által, akkor szeparálhatóak az S által is;

Definíciók (ismétlés)

- V n-dimenziós vektortér $\mathbb{F}$ fölött, koord. gyűrű n-változós polinomgyűrű, $G \leq GL(V)$ véges részcsoportra $\rightarrow$ $\mathbb{F}[V]^G$ *invariánsgyűrű*;
- $S \subset \mathbb{F}[V]^G$ *szeparálórendszer*, ha $u, v \in V$ vektorok szeparálhatóak $\mathbb{F}[V]^G$ által, akkor szeparálhatóak az S által is;

A sejtés

- *elemszámra nézve minimális* szeparálórendszer mérete:

$$\gamma = \gamma(q, k) := \left\lceil \log_q(k) \right\rceil,$$

ahol q a test elemszáma, k pedig a $G \times V \to V$ hatás orbitjainak a száma;

- az $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ és $G = S_n$ partikuláris esetben belátták, hogy az

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_2) = \{ s_{2^r} \mid 0 \leq r \leq \lfloor \log_2 \rfloor \}$$

elemszámra nézve minimális szeparálórendszer;

- *sejtés: ha* $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$, *akkor az*

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_3) = \{ s_{3^k}, s_{2.3^k} \mid 0 \leq k \leq \lfloor \log_3(n) - \log_3(2) \rfloor \}$$

egy tartalmazásra nézve minimális szeparálórendszert alkot $\mathbb{F}_3[V]^{S_n}$*-ben;*

A sejtés

- *elemszámra nézve minimális* szeparálórendszer mérete:

$$\gamma = \gamma(q, k) := \left\lceil \log_q(k) \right\rceil,$$

ahol q a test elemszáma, k pedig a $G \times V \to V$ hatás orbitjainak a száma;

- az $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ és $G = S_n$ partikuláris esetben belátták, hogy az

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_2) = \{ s_{2^r} \mid 0 \leq r \leq \lfloor \log_2 \rfloor \}$$

elemszámra nézve minimális szeparálórendszer;

- *sejtés: ha* $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$, *akkor az*

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_3) = \{ s_{3^k}, s_{2 \cdot 3^k} \mid 0 \leq k \leq \lfloor \log_3(n) - \log_3(2) \rfloor \}$$

egy tartalmazásra nézve minimális szeparálórendszert alkot $\mathbb{F}_3[V]^{S_n}$*-ben;*

A sejtés

- *elemszámra nézve minimális* szeparálórendszer mérete:

$$\gamma = \gamma(q,k) := \left\lceil \log_q(k) \right\rceil ,$$

ahol q a test elemszáma, k pedig a $G \times V \to V$ hatás orbitjainak a száma;

- az $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ és $G = S_n$ partikuláris esetben belátták, hogy az

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_2) = \{ s_{2^r} \mid 0 \leq r \leq \lfloor \log_2 \rfloor \}$$

elemszámra nézve minimális szeparálórendszer;

- *sejtés: ha* $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$, *akkor az*

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_3) = \{ s_{3^k}, s_{2.3^k} \mid 0 \leq k \leq \lfloor \log_3(n) - \log_3(2) \rfloor \}$$

egy tartalmazásra nézve minimális szeparálórendszert alkot $\mathbb{F}_3[V]^{S_n}$*-ben;*

Jelölések

- az orbitreprezentánsok:

$$e_{i,j} = \Bigg(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i\text{-szer}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{j\text{-szer}}, 0, \ldots, 0\Bigg), \; i + j \leq n;$$

- legyen

$$i = i_0 + i_1 \cdot 3 + \ldots + i_t \cdot 3^t =: (i_t i_{t-1} \ldots i_0)_3 \, ,$$
$$j = j_0 + j_1 \cdot 3 + \ldots + j_t \cdot 3^t =: (j_t j_{t-1} \ldots j_0)_3$$

az i és j hármas számrendszerbeli felírása;

Jelölések

- az orbitreprezentánsok:

$$e_{i,j} = \Big(\underbrace{1, \dots, 1}_{i\text{-szer}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{j\text{-szer}}, 0, \dots, 0\Big), \ i + j \le n;$$

- legyen

$$i = i_0 + i_1 \cdot 3 + \dots + i_t \cdot 3^t =: (i_t i_{t-1} \dots i_0)_3 \,,$$
$$j = j_0 + j_1 \cdot 3 + \dots + j_t \cdot 3^t =: (j_t j_{t-1} \dots j_0)_3$$

az i és j hármas számrendszerbeli felírása;

Szükséges segédtételek

- *segédtételek*:
    1. *ha az* $s_{3^k}(e_{i,j})$ *és* $s_{2.3^k}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* i, j *értékeket, akkor az* $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ *egy szeparálórendszer;*
    2. *az* $s_k(e_{i,j})$ *értéke nem más, mint az* $(1+x)^i(1-x)^j \in \mathbb{F}_3[x]$ *polinomban a* k*-adfokú tag együtthatója;*
    3. *az* i_0 *és* j_0 *értékeket egyértelműen meghatározzák az* $s_1(e_{i,j}), s_2(e_{i,j})$ *értékek;*
    4. *ha* $3 \mid i$ *és* $3 \mid j$, *akkor*
    $$s_{3\cdot d}(e_{i,j}) = s_d(e_{i/3,j/3});$$
    5. *az* $i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k$ *és* $s_{3^{k+1}}(e_{i,j}), s_{2\cdot 3^{k+1}}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* $s_{3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0), j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$, *illetve* $s_{2\cdot 3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0), j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$ *értékeket;*

Szükséges segédtételek

- *segédtételek*:
    1. *ha az* $s_{3^k}(e_{i,j})$ *és* $s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* i, j *értékeket, akkor az* $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ *egy szeparálórendszer*;
    2. *az* $s_k(e_{i,j})$ *értéke nem más, mint az* $(1+x)^i(1-x)^j \in \mathbb{F}_3[x]$ *polinomban a* k*-adfokú tag együtthatója*;
    3. *az* i_0 *és* j_0 *értékeket egyértelműen meghatározzák az* $s_1(e_{i,j}), s_2(e_{i,j})$ *értékek;*
    4. *ha* $3 \mid i$ *és* $3 \mid j$, *akkor*
    $$s_{3\cdot d}(e_{i,j}) = s_d(e_{i/3,j/3});$$
    5. *az* $i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k$ *és* $s_{3^{k+1}}(e_{i,j}), s_{2\cdot 3^{k+1}}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* $s_{3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0), j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$, *illetve* $s_{2\cdot 3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0), j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$ *értékeket;*

Szükséges segédtételek

- *segédtételek*:
  1. *ha az* $s_{3^k}(e_{i,j})$ *és* $s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* i,j *értékeket, akkor az* $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ *egy szeparálórendszer;*
  2. *az* $s_k(e_{i,j})$ *értéke nem más, mint az* $(1+x)^i(1-x)^j \in \mathbb{F}_3[x]$ *polinomban a* k*-adfokú tag együtthatója;*
  3. *az* i_0 *és* j_0 *értékeket egyértelműen meghatározzák az* $s_1(e_{i,j})$, $s_2(e_{i,j})$ *értékek;*
  4. *ha* $3 \mid i$ *és* $3 \mid j$, *akkor*
  $$s_{3\cdot d}(e_{i,j}) = s_d(e_{i/3,j/3});$$
  5. *az* $i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k$ *és* $s_{3^{k+1}}(e_{i,j})$, $s_{2\cdot 3^{k+1}}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* $s_{3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0),j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$, *illetve* $s_{2\cdot 3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0),j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$ *értékeket;*

Szükséges segédtételek

- *segédtételek*:
  1. *ha az* $s_{3^k}(e_{i,j})$ *és* $s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* i, j *értékeket, akkor az* $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ *egy szeparálórendszer;*
  2. *az* $s_k(e_{i,j})$ *értéke nem más, mint az* $(1+x)^i(1-x)^j \in \mathbb{F}_3[x]$ *polinomban a* k*-adfokú tag együtthatója;*
  3. *az* i_0 *és* j_0 *értékeket egyértelműen meghatározzák az* $s_1(e_{i,j})$, $s_2(e_{i,j})$ *értékek;*
  4. *ha* $3 \mid i$ *és* $3 \mid j$, *akkor*
  $$s_{3\cdot d}(e_{i,j}) = s_d\left(e_{i/3,j/3}\right);$$
  5. *az* $i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k$ *és* $s_{3^{k+1}}(e_{i,j})$, $s_{2\cdot 3^{k+1}}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* $s_{3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0), j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$, *illetve* $s_{2\cdot 3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0), j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$ *értékeket;*

Szükséges segédtételek

- *segédtételek:*
  1. *ha az* $s_{3^k}(e_{i,j})$ *és* $s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* i, j *értékeket, akkor az* $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ *egy szeparálórendszer;*
  2. *az* $s_k(e_{i,j})$ *értéke nem más, mint az* $(1+x)^i(1-x)^j \in \mathbb{F}_3[x]$ *polinomban a* k*-adfokú tag együtthatója;*
  3. *az* i_0 *és* j_0 *értékeket egyértelműen meghatározzák az* $s_1(e_{i,j}),\ s_2(e_{i,j})$ *értékek;*
  4. *ha* $3 \mid i$ *és* $3 \mid j$, *akkor*
  $$s_{3\cdot d}(e_{i,j}) = s_d\left(e_{i/3,j/3}\right);$$
  5. *az* $i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k$ *és* $s_{3^{k+1}}(e_{i,j}),\ s_{2\cdot 3^{k+1}}(e_{i,j})$ *értékek meghatározzák az* $s_{3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0),j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$, *illetve* $s_{2\cdot 3^{k+1}}\left(e_{i-(i_k i_{k-1}\ldots i_0),j-(j_k j_{k-1}\ldots j_0)_3}\right)$ *értékeket;*

A sejtés bizonyítása (vázlat)

- *bizonyítás*:
  1. lépés: tét. fel, hogy ismertek az $s_{3^k}(e_{i,j}), s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ (minden k-ra), ekkor a 3-as Lemma alapján az $s_1(e_{i,j}), s_2(e_{i,j})$ értékek meghatározzák az i_0 és j_0 értékeket;
  2. lépés: az 5-ös Lemma szerint az i_0, j_0 és $s_3(e_{i,j}), s_6(e_{i,j})$ értékekből $\Rightarrow$ $s_3(e_{i-i_0,j-j_0}), s_6(e_{i-i_0,j-j_0})$ értékek meghatározottak;
  3. lépés: a 4-es Lemma alapján tudjuk, hogy
$$s_3(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_1\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right),$$
$$s_6(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_2\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right);$$
  4. lépés: a 3-as Lemmára hivatkozva $\Rightarrow$ i_1, j_1, és az eljárást folytatva az i, j hármas számrendszerbeli felírásában minden jegyet megkapunk;
  5. lépés: az 1-es Lemma alapján $\Rightarrow$ $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ szeparálórendszer, q.e.d;

A sejtés bizonyítása (vázlat)

- *bizonyítás*:
  1. lépés: tét. fel, hogy ismertek az $s_{3^k}\left(e_{i,j}\right), s_{2\cdot 3^k}\left(e_{i,j}\right)$ (minden k-ra), ekkor a 3-as Lemma alapján az $s_1\left(e_{i,j}\right), s_2\left(e_{i,j}\right)$ értékek meghatározzák az i_0 és j_0 értékeket;
  2. lépés: az 5-ös Lemma szerint az i_0, j_0 és $s_3\left(e_{i,j}\right), s_6\left(e_{i,j}\right)$ értékekből $\Rightarrow s_3\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right), s_6\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right)$ értékek meghatározottak;
  3. lépés: a 4-es Lemma alapján tudjuk, hogy
  $$s_3\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right) = s_1\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right),$$
  $$s_6\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right) = s_2\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right);$$
  4. lépés: a 3-as Lemmára hivatkozva $\Rightarrow i_1, j_1$, és az eljárást folytatva az i, j hármas számrendszerbeli felírásában minden jegyet megkapunk;
  5. lépés: az 1-es Lemma alapján $\Rightarrow S_{n,1}\left(\mathbb{F}_3\right)$ szeparálórendszer, q.e.d;

A sejtés bizonyítása (vázlat)

- *bizonyítás*:
  1. lépés: tét. fel, hogy ismertek az $s_{3^k}\left(e_{i,j}\right), s_{2\cdot 3^k}\left(e_{i,j}\right)$ (minden k-ra), ekkor a 3-as Lemma alapján az $s_1\left(e_{i,j}\right), s_2\left(e_{i,j}\right)$ értékek meghatározzák az i_0 és j_0 értékeket;
  2. lépés: az 5-ös Lemma szerint az i_0, j_0 és $s_3\left(e_{i,j}\right), s_6\left(e_{i,j}\right)$ értékekből $\Rightarrow$ $s_3\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right), s_6\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right)$ értékek meghatározottak;
  3. lépés: a 4-es Lemma alapján tudjuk, hogy

$$s_3\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right) = s_1\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right),$$
$$s_6\left(e_{i-i_0,j-j_0}\right) = s_2\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right);$$

  4. lépés: a 3-as Lemmára hivatkozva $\Rightarrow$ i_1, j_1, és az eljárást folytatva az i, j hármas számrendszerbeli felírásában minden jegyet megkapunk;
  5. lépés: az 1-es Lemma alapján $\Rightarrow$ $S_{n,1}\left(\mathbb{F}_3\right)$ szeparálórendszer, q.e.d;

A sejtés bizonyítása (vázlat)

- *bizonyítás*:
  1. lépés: tét. fel, hogy ismertek az $s_{3^k}(e_{i,j}), s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ (minden k-ra), ekkor a 3-as Lemma alapján az $s_1(e_{i,j}), s_2(e_{i,j})$ értékek meghatározzák az i_0 és j_0 értékeket;
  2. lépés: az 5-ös Lemma szerint az i_0, j_0 és $s_3(e_{i,j}), s_6(e_{i,j})$ értékekből $\Rightarrow$ $s_3(e_{i-i_0,j-j_0}), s_6(e_{i-i_0,j-j_0})$ értékek meghatározottak;
  3. lépés: a 4-es Lemma alapján tudjuk, hogy

$$s_3(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_1\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right),$$
$$s_6(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_2\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right);$$

  4. lépés: a 3-as Lemmára hivatkozva $\Rightarrow$ i_1, j_1, és az eljárást folytatva az i, j hármas számrendszerbeli felírásában minden jegyet megkapunk;
  5. lépés: az 1-es Lemma alapján $\Rightarrow$ $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ szeparálórendszer, q.e.d;

A sejtés bizonyítása (vázlat)

- *bizonyítás*:
  1. lépés: tét. fel, hogy ismertek az $s_{3^k}(e_{i,j}), s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ (minden k-ra), ekkor a 3-as Lemma alapján az $s_1(e_{i,j}), s_2(e_{i,j})$ értékek meghatározzák az i_0 és j_0 értékeket;
  2. lépés: az 5-ös Lemma szerint az i_0, j_0 és $s_3(e_{i,j}), s_6(e_{i,j})$ értékekből $\Rightarrow$ $s_3(e_{i-i_0,j-j_0}), s_6(e_{i-i_0,j-j_0})$ értékek meghatározottak;
  3. lépés: a 4-es Lemma alapján tudjuk, hogy

$$s_3(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_1\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right),$$
$$s_6(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_2\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right);$$

  4. lépés: a 3-as Lemmára hivatkozva $\Rightarrow$ i_1, j_1, és az eljárást folytatva az i, j hármas számrendszerbeli felírásában minden jegyet megkapunk;
  5. lépés: az 1-es Lemma alapján $\Rightarrow$ $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ szeparálórendszer, q.e.d;

A sejtés bizonyítása (vázlat)

- *bizonyítás*:
  1. lépés: tét. fel, hogy ismertek az $s_{3^k}(e_{i,j}), s_{2\cdot 3^k}(e_{i,j})$ (minden k-ra), ekkor a 3-as Lemma alapján az $s_1(e_{i,j}), s_2(e_{i,j})$ értékek meghatározzák az i_0 és j_0 értékeket;
  2. lépés: az 5-ös Lemma szerint az i_0, j_0 és $s_3(e_{i,j}), s_6(e_{i,j})$ értékekből $\Rightarrow$ $s_3(e_{i-i_0,j-j_0}), s_6(e_{i-i_0,j-j_0})$ értékek meghatározottak;
  3. lépés: a 4-es Lemma alapján tudjuk, hogy
  $$s_3(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_1\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right),$$
  $$s_6(e_{i-i_0,j-j_0}) = s_2\left(e_{(i-i_0)/3,(j-j_0)/3}\right);$$
  4. lépés: a 3-as Lemmára hivatkozva $\Rightarrow$ i_1, j_1, és az eljárást folytatva az i, j hármas számrendszerbeli felírásában minden jegyet megkapunk;
  5. lépés: az 1-es Lemma alapján $\Rightarrow$ $S_{n,1}(\mathbb{F}_3)$ szeparálórendszer, q.e.d;

A sejtés

- orbitreprezentánsok jelölése:

$$e_{k_1,\dots,k_{p-1}} = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{k_1\text{-szer}},\underbrace{2,\dots,2}_{k_2\text{-szer}},\dots,\underbrace{p-1,\dots,p-1}_{k_{p-1}\text{-szer}},0,\dots,0\right),\ \sum_{i=1}^{p-1} k_i \le n;$$

- k_i p alapú számrendszerbeli felírása

$$k_i = \left(k_{i_t} k_{i_{t-1}} \dots k_{i_0}\right)_p .$$

- *sejtés: ha $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ és $m = 1$, akkor a következő halmaz egy tartalmazásra nézve minimális szeparálórendszert alkot $\mathbb{F}\left[V\right]^{S_n}$-ben:*

$$S_{n,1}\left(\mathbb{F}_p\right) = \left\{ s_{p^k}, s_{2\cdot p^k}, \dots, s_{(p-1)\cdot p^k} \,\middle|\, 0 \le k \le \left\lfloor \log_p(n) - \log_p(p-1) \right\rfloor \right\};$$

A sejtés

- orbitreprezentánsok jelölése:

$$e_{k_1,\dots,k_{p-1}} = \Big(\underbrace{1,\dots,1}_{k_1\text{-szer}}, \underbrace{2,\dots,2}_{k_2\text{-szer}}, \dots, \underbrace{p-1,\dots,p-1}_{k_{p-1}\text{-szer}}, 0,\dots,0\Big), \sum_{i=1}^{p-1} k_i \le n;$$

- k_i p alapú számrendszerbeli felírása

$$k_i = \left(k_{i_t} k_{i_{t-1}} \dots k_{i_0}\right)_p .$$

- *sejtés: ha $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ és $m = 1$, akkor a következő halmaz egy tartalmazásra nézve minimális szeparálórendszert alkot $\mathbb{F}[V]^{S_n}$-ben:*

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_p) = \left\{ s_{p^k}, s_{2\cdot p^k}, \dots, s_{(p-1)\cdot p^k} \,\middle|\, 0 \le k \le \left\lfloor \log_p(n) - \log_p(p-1) \right\rfloor \right\};$$

A sejtés

- orbitreprezentánsok jelölése:

$$e_{k_1,\dots,k_{p-1}} = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{k_1\text{-szer}}, \underbrace{2,\dots,2}_{k_2\text{-szer}}, \dots, \underbrace{p-1,\dots,p-1}_{k_{p-1}\text{-szer}}, 0,\dots,0\right), \sum_{i=1}^{p-1} k_i \leq n;$$

- k_i p alapú számrendszerbeli felírása

$$k_i = \left(k_{i_t} k_{i_{t-1}} \dots k_{i_0}\right)_p .$$

- *sejtés: ha $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ és $m = 1$, akkor a következő halmaz egy tartalmazásra nézve minimális szeparálórendszert alkot $\mathbb{F}[V]^{S_n}$-ben:*

$$S_{n,1}(\mathbb{F}_p) = \left\{ s_{p^k}, s_{2\cdot p^k}, \dots, s_{(p-1)\cdot p^k} \,\middle|\, 0 \leq k \leq \left\lfloor \log_p(n) - \log_p(p-1) \right\rfloor \right\};$$

Általánosított lemmák

- *1. Lemma: Ha az* $s_{p^k}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), s_{2\cdot p^k}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), \ldots, s_{(p-1)\cdot p^k}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right)$ *értékek meghatározzák a* $k_1, \ldots, k_{p-1}$ *értékeket, akkor az* $S_{n,1}\left(\mathbb{F}_p\right)$ *egy szeparálórendszer;*
- *2. Lemma: Az* $s_l\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right)$ *értéke nem más, mint a* $\prod_{i=1}^{p-1}(1+i\cdot x)^{k_i} \in \mathbb{F}_p[x]$ *szorzatban a* l*-edfokú tag együtthatója.*
- *3. Lemma: Ha* $p \mid k_i$ *minden* $i=\overline{1,p-1}$*, akkor*

$$s_{p\cdot d}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right) = s_d\left(e_{k_1/p,\ldots,k_{p-1}/p}\right).$$

Általánosított lemmák

- *1. Lemma: Ha az* $s_{p^k}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), s_{2\cdot p^k}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), \ldots, s_{(p-1)\cdot p^k}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right)$ *értékek meghatározzák a* $k_1, \ldots, k_{p-1}$ *értékeket, akkor az* $S_{n,1}\left(\mathbb{F}_p\right)$ *egy szeparálórendszer;*
- *2. Lemma: Az* $s_l\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right)$ *értéke nem más, mint a* $\prod_{i=1}^{p-1}(1+i\cdot x)^{k_i} \in \mathbb{F}_p[x]$ *szorzatban a* l*-edfokú tag együtthatója.*
- *3. Lemma: Ha* $p \mid k_i$ *minden* $i=\overline{1,p-1}$*, akkor*

$$s_{p\cdot d}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right) = s_d\left(e_{k_1/p,\ldots,k_{p-1}/p}\right).$$

Általánosított lemmák

- *1. Lemma: Ha az* $s_{p^k}\left(e_{k_1,\dots,k_{p-1}}\right), s_{2\cdot p^k}\left(e_{k_1,\dots,k_{p-1}}\right), \dots, s_{(p-1)\cdot p^k}\left(e_{k_1,\dots,k_{p-1}}\right)$ *értékek meghatározzák a* $k_1, \dots, k_{p-1}$ *értékeket, akkor az* $S_{n,1}\left(\mathbb{F}_p\right)$ *egy szeparálórendszer;*
- *2. Lemma: Az* $s_l\left(e_{k_1,\dots,k_{p-1}}\right)$ *értéke nem más, mint a* $\prod_{i=1}^{p-1}(1+i\cdot x)^{k_i} \in \mathbb{F}_p[x]$ *szorzatban a* l*-edfokú tag együtthatója.*
- *3. Lemma: Ha* $p \,|\, k_i$ *minden* $i = \overline{1, p-1}$*, akkor*

$$s_{p\cdot d}\left(e_{k_1,\dots,k_{p-1}}\right) = s_d\left(e_{k_1/p,\dots,k_{p-1}/p}\right).$$

Általánosított lemmák

- *4. Lemma*: *A* $k_{i_0}, k_{i_1}, \ldots, k_{i_l}$, $i = \overline{1, p-1}$ *és*

  $$s_{i \cdot p^{l+1}}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), \text{ minden } i = \overline{1, p-1}$$

  értékek meghatározzák az

  $$s_{i \cdot p^{l+1}}\left(e_{k_1 - \left(k_{1_l} k_{1_{l-1}} \ldots k_{1_0}\right)_p, \ldots, k_{p-1} - \left(k_{p-1_l} k_{p-1_{l-1}} \ldots k_{p-1_0}\right)_p}\right),$$

  értékeket, minden $i = \overline{1, p-1}$.

- *5. Lemma (sejtés)*: *Az* $s_1\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), \ldots, s_{p-1}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right)$ *értékek meghatározzák az* $k_{1_0}, \ldots, k_{p-1_0}$ *értékeket.*

Általánosított lemmák

- *4. Lemma*: *A* $k_{i_0}, k_{i_1}, \ldots, k_{i_l}$, $i = \overline{1, p-1}$ *és*

$$s_{i \cdot p^{l+1}}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), \textit{ minden } i = \overline{1, p-1}$$

értékek meghatározzák az

$$s_{i \cdot p^{l+1}}\left(e_{k_1 - \left(k_{1_l} k_{1_{l-1}} \ldots k_{1_0}\right)_p, \ldots, k_{p-1} - \left(k_{p-1_l} k_{p-1_{l-1}} \ldots k_{p-1_0}\right)_p}\right),$$

értékeket, minden $i = \overline{1, p-1}$.

- *5. Lemma (sejtés)*: *Az* $s_1\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right), \ldots, s_{p-1}\left(e_{k_1,\ldots,k_{p-1}}\right)$ *értékek meghatározzák az* $k_{1_0}, \ldots, k_{p-1_0}$ *értékeket.*

Hivatkozás I

G. Kemper, A. Lopatin, F. Reimers.
Separating Invariants Over Finite Fields.
Journal of Pure and Applied Algebra, 226 (2022), 106904.

Köszönöm a figyelmet!