Alsó becslések bizonyos körosztási polinomok legnagyobb abszolútértékű együtthatóinak abszolútértékére

Legyen $n \geq 1$ egész, $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Az n-edik körosztási polinomot a

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} (x - \varepsilon^k)$$

szorzattal definiáljuk. Könnyen látható, hogy $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, továbbá tanult tétel szerint irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ismert tétel az is, hogy bármely a egész szám fellép egy alkalmas körosztási polinom valamelyik együtthatójaként. Az $a < 0$, $2|a$ speciális esetre I. Schur 1931-ben adott egyszerű elegáns bizonyítást.

$A(n)$-nel szokás jelölni $\Phi_n(x)$ legnagyobb abszolútértékű együtthatójának abszolútértékét. A körosztási polinomokkal kapcsolatban leggyakrabban ezt vizsgáljuk. Ha $p|n$ (p prím), akkor $\Phi_{np}(x) = \Phi_n(x^p)$, így az együtthatókat elég négyzetmentes n-ekre vizsgálni. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $|\mu(n)| = 1$. $\omega(n)$-nel szokás jelölni n (különböző) prímosztóinak számát.

A szakdolgozatomban szerepel, hogy $\omega(n) = k$ esetén $A(n) \leq n^{\frac{2^{k-1}}{k} - 1}$, sőt

$$A(n) \leq c_k n^{\frac{2^{k-1}}{k} - 1} \qquad (1)$$

ahol $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = \frac{3}{4}$ és $k \geq 5$ esetén $c_k = \left(\frac{3}{8}\right)^{2^{k-5}}$.

Dolgozatomban az (1)-gyel ellentétes irányú becsléssel foglalkozom.

Az nem igaz, hogy bizonyos d_k konstansok mellett minden olyan n-re

$$A(n) \geq d_k n^{\frac{2^{k-1}}{k} - 1} \qquad (2)$$

volna, melyre $\omega(n) = k$. Igaznak látszik azonban az, hogy alkalmas fix pozitív d_k-k mellett (2) minden k esetén végtelen sok n-re teljesül. (Ha $k=1$ vagy $k=2$ (teljesül), akkor $d_1 = 1$ illetve $d_2 = 1$ mellett (2) nyilvánvalóan fennáll.)

Ez a sejtés következik az úgynevezett prím k-asok sejtéséből, mely a következőképpen szól. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitív egészek, $b_1, b_2, \dots, b_k$ egészek, és tegyük fel, hogy a $\prod_{j=1}^{k}(a_j x + b_j) \equiv 0 \bmod p$ kongruenciának minden p prímre kevesebb, mint p megoldása van. Ekkor az $a_j t + b_j$ $(1 \le j \le k)$ számok végtelen sok t esetén egyidejűleg prímek. A levezetés szerepel a mek-dolgozatomban, és megtalálható a Colloquia Mathematica folyóirat 34. kötetének 188-191. oldalán (P. T. Bateman, C. Pomerance and R. C. Vaughan: On the size of the coefficients of the cyclotomic polynomial)

Kutatásom célja a (2) egyenlőtlenséget minden $k \geq 3$ esetén végtelen sok n-re bizonyítani. Ehhez a következő újkeletű eredményt használom mely Maynardtól származik. Minden $k \geq 1$ egészhez van olyan L_k konstans, mely esetén végtelen sok $p = p_1$ prímre létezik k darab prímszám a $p_1 < p_2 < \dots < p_k \leq p_1 + L_k$ összefüggéssel. A bizonyítás eddig $k = 3, 4$ és 5 esetén sikerült, amit a dolgozat függelékében tárgyalok.