Végtelen gráfok színezése

Hraboczki Márton

2024. január

A kutatómunka tárgya

A kutatómunka során a végtelen gráfok szerteágazó témaköréből szemezgetve választottam egy résztémát, aminek állításait tanulmányozva feltérképeztem, milyen problémákkal foglalkozik. Választásom a gráfok színezésére esett.

Kromatikus szám

Definíció

Az X gráf kromatikus száma az a legkissebb számosság, ahány színnel ő jólszínezhető. Jólszínezés alatt a csúcsok egy olyan színezését értjük, ahol bármely két szomszédos csúcs különböző színű. A kromatikus szám jelölése $\mathrm{Chr}(X)$.

Galvin, Komjáth

Az az állítás, hogy minden gráfnak létezik kromatikus száma, ekvivalens a kiválasztási axiómával.

Színezési szám

Definíció

Az X gráf színezési száma az a legkisebb κ számosság, amelyre létezik a V csúcshalmaznak egy olyan $<$ jólrendezése, hogy minden $x \in V$ κ-nál kevesebb nála $<$ szerint kisebb csúccsal van összekötve. A színezési szám jelölése: $\mathrm{Col}(X)$.

Megjegyzés

Ha $\mathrm{Col}(X) = \kappa$ és $<$ a hozzá tartozó jólrendezés, akkor transzfinit rekurzióval $<$ mentén meg tudjuk adni X egy jólszínezését κ színnel, vagyis $\mathrm{Chr}(X) \leq \mathrm{Col}(X)$ mindig teljesül.

Részgráfok

Érdekes kérdés, hogy egy gráf milyen viszonyban van az ő részgráfjaival a 2 vizsgált mennyiségünket illetően.

Erdős - de Bruijn

Ha egy gráf minden véges részgráfja jólszínezhető n színnel, ahol n egy természetes szám, akkor az egész gráf is jólszínezhető n színnel.

Erdős, Hajnal

Legyen κ egy végtelen számosság. Ekkor a következők állíthatók:
1, Ha X egy olyan gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \kappa$, akkor létezik egy olyan Y részgráfja, amelyre $\mathrm{Chr}(Y) > \kappa$ szintén teljesül és minden csúcsának a foka $\geq \kappa$
2, Ha X egy olyan gráf, amire $\mathrm{Col}(X) > \kappa$, akkor létezik egy olyan Y részgráfja, amelyre $\mathrm{Col}(Y) > \kappa$ szintén teljesül és minden csúcsának a foka $\geq \kappa$.

Részgráfok

Állítás

κ végtelen számosságra a következő állítások ekvivalensek:
1, Col(X)$\leq \kappa^+$
2, X felírható κ erdő uniójaként.

Shelah

Ha $\lambda > \kappa$ végtelen számosságok, λ szinguláris és X egy olyan gráf, amely minden $|Y| < \lambda$ részgráfjára teljesül, hogy Col$(Y) \leq \kappa$, akkor Col$(X) \leq \kappa$.

Thomassen

1, Ha Col$(X) > \kappa$, akkor létezik egy κ-élösszefüggő Y részgráfja X-nek, amire Col$(Y) > \kappa$.
2, Ha Chr$(X) > \kappa$, akkor létezik egy κ-élösszefüggő Y részgráfja X-nek, amire Chr$(Y) > \kappa$.

Részgráfok

Állítás

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \omega$, akkor létezik X-nek egy összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \omega$.

Komjáth

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \omega$ akkor létezik egy n-szeresen összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \omega$, minden n természetes számra.

Sejtés, Erdős-Hajnal

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \omega$, akkor X-nek létezik egy ω-összefüggő Y részgráfja.

Gráfok szorzata

Definíció

(V, X), (W, Y) 2 gráf. Az ő szorzatuk az a $(V \times W, X \times Y)$ gráf, ahol $X \times Y = \{\{< v, w >, < v', w' >\} : \{v, v'\} \in X, \{w, w'\} \in Y\}$. Röviden csak $X \times Y$ -al fogjuk jelölni ezt a szorzatot.

Hajnal

Ha Chr(X)$< \omega \leq$ Chr(Y), akkor Chr($X \times Y$)=Chr(X).

Hajnal

κ végtelen számosságra léteznek olyan X_α $(\alpha < \kappa^+)$ gráfok 2^κ-án, hogy Chr$(X_\alpha) = \kappa^+$, de Chr$(X_\alpha \times X_{\alpha'})= \kappa$, minden $\alpha \neq \alpha' < \kappa$ -ra.

Gráfok szorzata

Állítás

Ha κ végtelen számosság és n egy természetes szám, akkor megadható úgy κ^+ gráf, mind 2^κ számosságú, hogy közülük bármely n szorzata κ^+ kromatikus számú, de bármely $n+1$ szorzata már csak κ kromatikus számú.

Hajnal

Ha $\mathrm{Chr}(X)$,$\mathrm{Chr}(Y) > \kappa$, $\mathrm{Chr}(X \times Y) < \kappa$, akkor $\mathrm{Chr}(X') < \kappa$, $\mathrm{Chr}(Y')$ $< \kappa$ teljesül minden $|X'| = \kappa$, $|Y'| = \kappa$ részgráfra.