Rejtőzködő gráftulajdonságok végtelen gráfokon

Kocsis Anett

Egyéni kutatómunka

1. Bevezetés

Egy gráftulajdonságot akkor nevezünk rejtőzködőnek, ha bármely olyan algoritmussal, amely két pont közötti él létezésére kérdezhet rá, a legrosszabb esetben az összes élet le kell kérdeznünk ahhoz, hogy megtudjuk egy adott gráf rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal. A híres Aanderaa–Karp–Rosenberg-sejtés (a továbbiakban AKR-sejtés) szerint minden monoton gráftulajdonság rejtőzködő véges gráfokon. Csernák Tamás és Soukup Lajos korábban már vizsgálták ezen kérdéskör végtelenített verzióját: vagyis transzfiniten kérdezzük le egy végtelen gráf éleit. Mi ezt a játékot ω-típusban vizsgáljuk. Vezessük be a két játékosra a Kérdező és a Válaszoló elnevezéseket. A félreértések elkerülése végett egy tulajdonságot ω-rejtőzködőnek vagy rejtőzködőnek hívunk, asszerint hogy a Válaszolónak a transzfinit játékban, vagy az ω-típusú játékban van nyerő stratégiája. A játékot lentebb precízebben is megfogalmazom.

Célunk volt minél több természetes tulajdonságról eldönteni hogy rejtőzködő-e, illetve szeretnénk megfogalmazni valamilyen általánosabb (például az AKR-sejtéshez hasonló) tételt is arra vonatkozólag, hogy milyen gráftulajdonságok ω-rejtőzködők.

A félév során először megvizsgáltuk, hogy az alábbi természetesen felmerülő gráftulajdonságok közül melyek ω-rejtőzködőek:

- G összefüggő
- G tartalmaz n független élet (rögzített $n \in \mathbb{N}$)
- G tartalmaz n-hosszú kört (rögzített $n \in \mathbb{N}$)
- G páros gráf
- G átmérője legfeljebb d (rögzített $d \in \mathbb{N}$)
- G nem tartalmaz izolált pontot

Ezen tulajdonságok viszgálatával megtudtuk, hogy végtelen esetben nem teljesül az AKR-sejtés, hiszen például kiderült, hogy a G tartalmaz 2 független élet tulajdonság nem ω-rejtőzködő, azonban monoton.

A következő probléma mellyel foglalkoztunk, hogy ω-rejtőzködő és a rejtözködő fogalmakat válasszuk el egymástól. Ezalatt azt értjük, hogy keressünk olyan gráftulajdonsáogot, amely ω-rejtőzködő, de nem rejtőzködő.

Ezután rátértünk arra a kérdéskörre, hogy milyen általános sejtéseket lehetne megfogalmazni a témakörben, amelyek hasonlóak mint az AKR-sejtés, de valamilyen szempontból használják például a gráftulajdonság topológikus komplexitását is.

Ezek irányok közül talán az utolsó a legkevésbé kiforrott, erre később visszatérünk. Térjünk rá tehát a probléma precíz megfogalmazására.

2. Az ω-rejtőzködő gráftulajdonságok

Szemléletesen a következő történik: adott egy előre rögzített P gráftulajdonság, ami alatt $2^{[\mathbb{N}]^2}$ egy olyan részét értjük, amely invariáns $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ hatására. Kérdező és Válaszoló játszik egymás ellen, mégpedig úgy hogy egy gráfot építenek: Kérdező minden lépésben rákérdez egy élre, Válaszoló pedig eldönti, hogy az adott él benne legyen-e a gráfban vagy sem. Ezt játszák megszámlálhatóan sok lépésig (precízen: ω lépésig), és Kérdező abban az esetben nyer, ha nem kérdezte meg az összes élet, továbbá el tudja dönteni, hogy a kialakult gráf rendelkezik-e a P tulajdonsággal (azaz vagy bármely gráf, amely kiterjeszti az azokat a megkötéseket, amik a játék során kialakultak, rendelkezik a P tulajdonsággal, vagy egyik sem rendelkezik a P tulajdonsággal.)

Most megadjuk a játékot precízebben is. A végtelen játékok a leíró halmazelmélet egy fontos területe. (Általános bevezetés a témába, és a legalapvetőbb példák. megtalálhatóak [1, 20. fejezet]-ben.). A játékot megadhatjuk egy végtelen, gallyazott fagráffal, legyen ez T. Nevezzük S-nek azt a halmazt, amely az összes, egy adott ponton lehetséges lépést tartalmazza (ez általában, és a esetünkben is megszámlálható), ekkor nyilván $T \subseteq [S]^{<\omega}$ (vagyis olyan véges sorozatok, amelyeknek minden eleme S-beli). A nyerőhalmaz $[T]$, vagyis a lefutások terének egy részhalmaza, jelöljük ezt A_S-sel. Mivel $[T]$ minden fa esetében 2^S egy zárt részhalmaza, így speciálisan kompakt, és ha S megszámlálható is, akkor lengyel tér. Így van értelme arról beszélni, hogy A_S-nek mi a Borel komplexitása. Egy nyerő stratégia az egyes játékos (jelen esetben Kérdező) számára egy olyan részfája T-nek, amelyben minden párosadik szinten 1-felé ágazik a fa, minden páratlanadik szinten pedig ugyanúgy mint eredetileg T-ben, valamint a részfa lefutásainak halmaza része A_S-nek. (A második játékosra persze hasonlóképp definiáljuk.)

A véges játékoktól eltérően könnyen lehet olyan végtelen játékot konstruálni, amelyben egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája. A témakör egy nagyon alapvető (de messzemenően nem triviális) tétele a Martin-tétel, mely szerint ha a nyerő halmaz (A_S) Borel, akkor a játék eldöntött, vagyis az egyik játékosnak van nyerő stratégiája.

A mi esetünkben a játék leírása a következő: S az természetes számok mint alaphalmaz rendezetlen párjaiból (vagyis élekből), illetve az igen, és a nem válaszokból áll, T pedig az a fa, melynek minden második szintje egy igen vagy nem, minden második szintje pedig egy olyan él, amely korábban még nem szerepelt. A nyerő halmaz pedig azon lefutásokból áll, ahol nem szerepel az összes él, és a lefutás végén kapott parciális gráf bármely kiterjesztése rendelkezik a P tulajdonsággal, vagy bármely kiterjesztése nem rendelkezik vele. Ennek a leírásnak még szerepe lesz az 5-ös szekcióban.

3. Különböző tulajdonságok vizsálata

Ahogy korábban említettem, megvizsgáltunk néhány természetes gráftulajdonságot.

3.1. Tétel. *A következő játékok ω-rejtőzködőek:*

- *G összefüggő*
- *G tartalmaz n-hosszú kört (rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén)*

- *létezik legalább d-ed fokú csúcs (rögzített $d \in \mathbb{N}$)*
- *G páros gráf*

3.2. Tétel. *A következő játékok nem ω-rejtőzködőek:*

- *G tartalmaz n független élet (rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén)*
- *G nem tartalmaz izolált pontot*

A bizonyításokat azok hosszára való tekintettel nem közöljük. Vegyük észre, hogy a 3.2-es Tétel kimondásában szereplő nem ω rejtőzködő definíció szerint ugyan nem jelenti, hogy a Kérdezőnek van nyerő stratégiája, viszont a Martin-tételt használva már következik. A fenti 3.2-es Tétel érdekes olyan szempontból is, hogy az első pontja megcáfolja az AKR-sejtést a végtelenített játékban.

4. Az ω-rejtőzködő és a rejtőzködő fogalmak elválasztása

A fenti tulajdonságok vizsgálatánál észrevettük, hogy ezek a tételek ugyangy teljesülnek a transzfinit rejtőzködő esetben is. Így természetesen felmerült a kérdés, hogy el tudjuk-e választani a két típusú játékot egymástól, vagyis tudunk-e olyan gráftulajdonságot mondani, mely ω-rejtőzködő, de nem rejtőzködő. Az persze könnyen meggondolható, hogy ha egy gráftulajdonság rejtőzködő, akkor ω-rejtőzködő is.

4.1. Tétel. *Van olyan P gráftulajdonság, amely ω-rejtőzködő, de nem rejtőzködő.*

Először gráfoknak egy olyan családjával választottuk el a két fogalmat, amely nem feltétlenül izomorfia invariáns, vegyük észre azonban, hogy az alapdefinícióban egy gráftulajdonságról ezt megköveteltük. Szerencsére azonban sikerült olyan P részhalmazt is találni, amely izomorfia invariáns, így valóban egy gráftulajdonság. (Nyilván ezutóbbinál a konstrukció kicsit bonyolódott.)

Az első esethez vázlatos bizonyítást közlünk: vegyünk egy olyan f függvényt, amely a Cantor-halmaz elmeihez rendel 0 vagy 1 értéket és bármely két elemhez, melyek pontosan egy jegyben térnek el, különbözőt rendel. Legyen a gráfcsaládunk a következő:

- A gráfnak tüntessük ki a $(0,1)$ és $(1,2)$ élét (vagy éppen nem-élét), legyenek ezek a 0-val és 1-gyel jelölt él.
- A gráf $(2,3),(3,4)\dots$ élei és nem-élei egy $0-1$ sorzatot kódolnak, legyen ez s_G (ahol G a gráf). Azokat a gráfokat fogjuk bevenni a családba, melyekre ha $f(s_G) = i$, akkor $1-i$ él, i pedig lehet él és lehet nem-él is.
- Minden más éle a gráfnak legyen nem-él.

Ekkor persze a játék nem rejtőzködő, hiszen Kérdező először végigkérdezi a $(2,3),(3,4)\dots$ éleket, illetve minden más élet a $(0,1)$ és $(1,2)$-n kívül. Ebből kiderül s_G, így az is, hogy $(0,1)$ és $(1,2)$ közül melyikre nem kell rákérdezni.

Viszont nem ω-rejtőzködő: Kérdezőnek rá kell kérdezni minden nem $(k,k+1)$ élre, hiszen csak akkor teljesül a tulajdonság, ha ezek mind nem-élek. Ha nem kérdez rá $(0,1)$ és $(1,2)$ egyikére sem, akkor nyilván nem tudja majd eldönteni. Ekkor azonban ha rákérdez $(0,1)$ vagy $(1,2)$ valamelyikére, akkor arra Válaszoló nem-élet mond. Ekkor még csak véges sok élre kérdezett rá a $(2,3),(3,4)\dots$ élek közül. Innentől rögzítsen Válaszoló egy olyan s sorozatot, amely kiegészíti a már meglévőt, és ha i-re kérdezett rá Kérdező, akkor $f(s)=i$. Innentől válaszoljon a rögzített sorozat szerint, illetve ha Kérdező rákérdez $1-i$-re, akkor az legyen él. Ha a végén $1-i$ nincs lekérdezve, az baj, mert attól függően hogy belevesszük-e vagy sem, megváltozik, hogy a gráf benne van-e a családban vagy sem. Ha pedig nem minden élet kérdez le Kérdező a $(2,3),(3,4)\dots$ közül, akkor a nem lekérdezett él értéke megváltoztatja f értékét, így megint nem tudja eldönteni hogy a gráf benne van a családban vagy nincs.

Megjegyezzük,hogy van jelöltünk a két játék elválasztására, amely a fenti példáknál természetesebben definiálható, azonban még nem tudjuk, hogy ez valóban elválasztja-e a két fogalmat. Ha elválasztaná, akkor megválaszolnánk azt a természetesen felmerülő igényt, hogy Borel módon válasszuk el a két játékot.

5. Eldöntetlen játék

Természetesen felmerülő kérdés, hogy van-e olyan gráftulajdonság, amelyhez rendelt játék nem eldöntött, vagyis egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája. Természetesen ha P-ről nem követeljük meg, hogy izomorfiainvariáns legyen, könnyű ilyet csinálni. Ilyen tulajdonságú, izomorfia invariáns P létezésén jelenleg is gondolkozunk.

További kérdés, amelyet nemrég kezdtük el vizsgálni, hogy mi a kapcsolat a nyerő halmaz komplexitása és a gráftulajdonság komplexitása között. Hiszen az utóbbi a gráfok terének ($2^{[\mathbb{N}]^2}$) egy részhalmaza, az előbbi pedig a lefutások terének. Eddigi eredményünk szerint ha $P \in \Delta^2_0$, akkor A_S Borel.

Hivatkozások

[1] Kechris, A. *Classical descriptive set theory*, vol. 156. Springer Science & Business Media, 2012.