Fuzzy gráfok

Kola László
Témavezető: Figula Ágota

ELTE
Természettudományi Kar
Matematikus Msc

Szükséges fogalmak

Definition ([Fuzzy], p. 2.)

Legyen $X \neq \emptyset$ egy halmaz. Ekkor az

$$\tilde{A} := \{(x, \tilde{A}(x)) | x \in X\}$$

rendezett párok halmazát X-nek a fuzzy részhalmazának nevezzük, ahol $\tilde{A} : X \to [0, 1]$ leképezést tagsági függvénynek, az X-beli elemekhez rendelt értéket tagsági foknak nevezzük.

Definition ([Fuzzy], p. 6.)

Legyenek X és Y halmazok. Azt mondjuk, hogy $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-ből Y-ba, ha fuzzy részhalmaza $X \times Y$-nak. Ekkor azt is mondjuk, hogy $\tilde{R}$ egy fuzzy reláció X-ből Y-ba.

Szükséges fogalmak

Definition ([Fuzzy], p. 9.)

Legyenek X,Y,Z halmazok, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-ből Y-be, $\tilde{Q}$ fuzzy reláció Y-ból Z-be. Ekkor $\tilde{R} \circ \tilde{Q}$ egy fuzzy reláció X-ből Z-be, ami a következőképpen van definiálva:

$$\forall (x,z) \in X \times Z : (\tilde{R} \circ \tilde{Q})(x,z) = \max_{y \in Y} \min\{\tilde{R}(x,y), \tilde{Q}(y,z)\}$$

Ezt a relációt $\tilde{R}$ és $\tilde{Q}$ kompozíciójának nevezzük.

Theorem ([Fuzzy], p. 9.)

A kompozícióképzés asszociatív.

Definition ([Fuzzy], p. 9.)

Legyen X halmaz, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n (azaz X-ből X-be). Ekkor értelmezzük a $\tilde{R}$ fuzzy reláció hatványait a következőképpen:

$$\tilde{R}^2(x,y) := (\tilde{R} \circ \tilde{R})(x,y), \quad \tilde{R}^{k+1}(x,y) := (\tilde{R}^k \circ \tilde{R})(x,y) \quad (k \geq 2),$$

$$\tilde{R}^\infty(x,y) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{R}^k(x,y)$$

Fuzzy gráfok fogalma

Definition ([Fuzzy], p. 21.)

Azt mondjuk, hogy a $G = (X, \tilde{R})$ pár egy fuzzy gráf, ha X egy halmaz és $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n. Az X halmazt és az $\tilde{R}$ fuzzy relációt rendre csúcshalmaznak és fuzzy élhalmaznak nevezzük. Ha az X halmaz véges, akkor véges fuzzy gráfról beszélünk. Az élekhez rendelt tagsági fokot az él erősségének nevezzük.

Definition ([Fuzzy], p. 23.)

Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf. $\rho := (x_0 x_1 \ldots x_{n-1} x_n)$ egy n hosszú út. A ρ út erőssége

$$\min_{i=1,\ldots,n} \tilde{R}(x_{i-1}, x_i)$$

Fuzzy gráfok fogalma

Definition ([Fuzzy], p. 22.)

Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf.

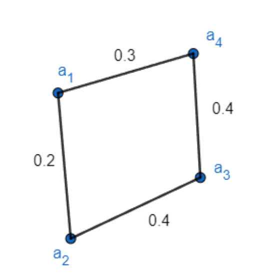
1. Azt mondjuk, hogy G egy irányítatlan fuzzy gráf, ha $\forall x, y \in X : \tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x)$.
2. Azt mondjuk, hogy G egy hurokélmentes fuzzy gráf, ha $\forall x \in X : \tilde{R}(x, x) = 0$.

Definition ([Fuzzy], p. 22.)

Legyenek X és Y véges halmazok, $\tilde{R}$ fuzzy reláció X-n, $\tilde{T}$ fuzzy reláció Y-n. Azt mondjuk, hogy a $H = (Y, \tilde{T})$ fuzzy gráf parciális fuzzy részgráfja a $G = (X, \tilde{R})$ fuzzy gráfnak, ha $Y \subseteq X$ és $\tilde{T} \subseteq \tilde{R}$.

Fuzzy gráfok fogalma

Example



ábra: Egy véges fuzzy gráf

Hidak

Definition ([Fuzzy], p. 25.)

Legyen $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf, és x,y két diszjunkt csúcs, melyre $\tilde{R}(x, y) > 0$. Legyen $G' = (X, \tilde{R}')$ az a fuzzy gráf, melyet úgy kapunk, hogy töröljük az (x, y) élt. Azt mondjuk, hogy (x, y) egy híd G-ben, ha $\exists u, v \in X : \tilde{R}'^{\infty}(u, v) < \tilde{R}^{\infty}(u, v)$.

Theorem ([Fuzzy], p. 26.)

(x, y) pontosan akkor egy híd, ha léteznek olyan u,v csúcsok, hogy a közöttük lévő legerősebb útjainak egy éle (x, y).

Hidak

Theorem ([Fuzzy], p.26.)

$G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy gráf, és x,y két csúcs. Ekkor a következő ekvivalensek:

1. *(x, y) egy híd G-ben*
2. *bármely G-beli körnek (x, y) nem a leggyengébb éle*
3. *$\tilde{R}'^{\infty}(x, y) < \tilde{R}(x, y)$*

Hidak

Bizonyítás.

1. $\rightarrow$ 2.: Indirekten tegyük fel, hogy létezik olyan G-beli kör, melynek leggyengébb éle (x, y). Vegyünk egy (x, y) élt tartalmazó utat, és töröljük (x, y); sétáljunk el az x-ből y-ba a körön. Ekkor kapunk egy legalább olyan erős utat, mint az eredeti. Ez viszont ellentmond annak, hogy (x, y) egy híd.

2. $\rightarrow$ 3.: Indirekten tegyük fel, hogy $\tilde{R}'^{\infty}(x, y) \geq \tilde{R}(x, y)$. Ekkor létezik olyan út x és y között G'-ben, amelynek az erőssége $\geq \tilde{R}(x, y)$. Ez az út (x, y) éllel együtt egy kört alkot, ahol (x, y) a leggyengébb él., ami ellentmondás.

3. $\rightarrow$ 1.: Ha (x, y) nem egy híd, akkor $\tilde{R}'^{\infty}(x, y) = \tilde{R}^{\infty}(x, y) \geq \tilde{R}(x, y)$, ami ellentmondás.

$\square$

Fuzzy erdők

Definition ([Fuzzy], p. 27.)

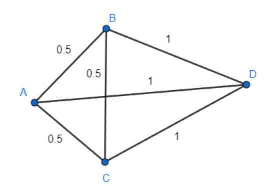
Azt mondjuk, hogy $G = (X, \tilde{R})$ egy fuzzy erdő, ha létezik $F = (X, \tilde{T})$ körmentes parciális fuzzy részgráf G-ben, hogy $\forall (x, y) \notin F : \tilde{R}(x, y) < \tilde{T}^{\infty}(x, y)$.

Theorem ([Fuzzy], p. 28.)

Egy G fuzzy gráf pontosan akkor egy fuzzy erdő, ha G bármely körében létezik egy olyan (x, y) él, hogy $\tilde{R}(x, y) < \tilde{R}'^{\infty}(x, y)$, ahol $G' = (X, \tilde{R}')$ G-nek egy olyan parciális fuzzy részgráfja, amelyet az (x, y) él törlésével kapunk.

Fuzzy erdők

Example



ábra: Egy fuzzy erdő

Theorem ([Fuzzy], p. 29.)

Ha G egy fuzzy erdő, akkor F élei G hídjai.

Irodalomjegyzék

John N. Morderson, Premchand S. Nair, "Fuzzy Mathematics: An Introduction for Engineers and Scientists", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH*, p. 1–29