Extremális gráfok véges geometriai konstrukciói

Stadler Domonkos

2024. január 06.

(k, g)-gráfok)

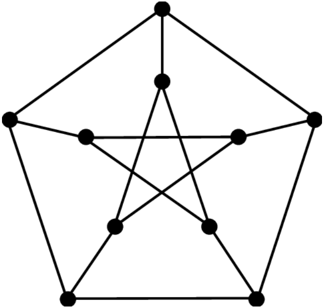
Egy gráfot (k, g)-gráfnak nevezünk, ha k-reguláris, g bőségű.

(k, g)-gráfok

Egy gráfot (k, g)-gráfnak nevezünk, ha k-reguláris, g bőségű.
Ha adott k, g paraméterekre minimális a csúcsszáma, (k, g)-cage.

(k, g)-gráfok)

Egy gráfot (k, g)-gráfnak nevezünk, ha k-reguláris, g bőségű.
Ha adott k, g paraméterekre minimális a csúcsszáma, (k, g)-cage.



Moore-gráfok létezése

Moore-korlát

$$M(k,g) = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + .. + k(k-1)^{\frac{g-1}{2}-1}, & k \text{ páratlan} \\ 2\left(1 + (k-1) + ... + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right), & k \text{ páros} \end{cases}$$

Moore-gráfok létezése

Moore-korlát

$$M(k,g) = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + .. + k(k-1)^{\frac{g-1}{2}-1}, & k \text{ páratlan} \\ 2\left(1 + (k-1) + ... + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right), & k \text{ páros} \end{cases}$$

Tétel (Hoffman- Singleton)

Ha G egy Moore-gráf $(k,5)$ paraméterekkel, akkor k csak $2,3,7$ vagy 57 lehet.

Moore-gráfok létezése

Moore-korlát

$$M(k,g) = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + .. + k(k-1)^{\frac{g-1}{2}-1}, & k \text{ páratlan} \\ 2\left(1 + (k-1) + ... + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}\right), & k \text{ páros} \end{cases}$$

Tétel (Hoffman- Singleton)

Ha G egy Moore-gráf $(k, 5)$ paraméterekkel, akkor k csak $2, 3, 7$ vagy 57 lehet.

Tétel

Ha $g > 5$ páratlan és $k > 2$, akkor nem létezik (k, g) Moore-gráf.

Általánosított sokszögek

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes illeszkedési struktúra.

Általánosított sokszögek

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes illeszkedési struktúra.

Axiómák

1. $d(x, y) \leq n \; \forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.

Általánosított sokszögek

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes illeszkedési struktúra.

Axiómák

1. $d(x, y) \leq n \ \forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.
2. Ha $d(x, y) = \ell < n$, akkor egyértelmű út van köztük.

Általánosított sokszögek

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes illeszkedési struktúra.

Axiómák

1. $d(x, y) \leq n \ \forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.
2. Ha $d(x, y) = \ell < n$, akkor egyértelmű út van köztük.
3. $\forall x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \ \exists y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ hogy $d(x, y) = n$.

Általánosított sokszögek

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes illeszkedési struktúra.

Axiómák

1. $d(x, y) \leq n \ \forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.
2. Ha $d(x, y) = \ell < n$, akkor egyértelmű út van köztük.
3. $\forall x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \ \exists y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ hogy $d(x, y) = n$.
4. Minden pont legalább három egyenesre illeszkedik, és minden egyenesen legalább három pont van. (vastagság)

Általánosított sokszögek

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ egy véges, pont-egyenes illeszkedési struktúra.

Axiómák

1. $d(x, y) \leq n \ \forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.
2. Ha $d(x, y) = \ell < n$, akkor egyértelmű út van köztük.
3. $\forall x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \ \exists y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ hogy $d(x, y) = n$.
4. Minden pont legalább három egyenesre illeszkedik, és minden egyenesen legalább három pont van. (vastagság)

Egy általánosított sokszög illeszkedési, másnéven Levi-gráfja egy összefüggő páros gráf n átmérővel és $2n$ bőséggel. Amennyiben a sokszög rendje (q, q), a gráf $q + 1$-reguláris.

Illeszkedési gráfok, mint Moore-gráfok

Tétel

Pontosan akkor létezik Moore-gráf $(k, 6)$ paraméterekkel, tehát $2(1 + (k-1) + (k-1)^2)$ csúccsal, ha létezik $(k-1)$-edrendű projektív sík. Ekkor a Moore gráf a sík illeszkedési gráfja.

Illeszkedési gráfok, mint Moore-gráfok

Tétel

Pontosan akkor létezik Moore-gráf $(k, 6)$ paraméterekkel, tehát $2(1 + (k-1) + (k-1)^2)$ csúccsal, ha létezik $(k-1)$-edrendű projektív sík. Ekkor a Moore gráf a sík illeszkedési gráfja.

Tétel

Páros $g > 6$ és $k > 2$ esetén (k, g) Moore-gráf csak $g = 8, 12$ esetén létezik. Ezek általánosított négy- és hatszögek illeszkedési gráfjai.

Konstrukciók (k, g)-gráfokra

Egy Levi-gráf megfelelően szimmetrikus részgráfját törölve kaphatunk kisebb (k, g) gráfokat.

Konstrukciók (k, g)-gráfokra

Egy Levi-gráf megfelelően szimmetrikus részgráfját törölve kaphatunk kisebb (k, g) gráfokat.

Definíció

Egy általánosított sokszögbeli t-jó struktúra egy $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ pár, ahol $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ és $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Továbbá minden $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$-beli ponton t darab $\mathcal{L}_0$-beli egyenes megy át, és fordítva, azaz minden $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$-beli egyenesen t darab $\mathcal{P}_0$-beli pont van.

Konstrukciók (k, g)-gráfokra

Egy Levi-gráf megfelelően szimmetrikus részgráfját törölve kaphatunk kisebb (k, g) gráfokat.

Definíció

Egy általánosított sokszögbeli t-jó struktúra egy $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ pár, ahol $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ és $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Továbbá minden $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$-beli ponton t darab $\mathcal{L}_0$-beli egyenes megy át, és fordítva, azaz minden $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$-beli egyenesen t darab $\mathcal{P}_0$-beli pont van.

Ha egy (q, q) rendű általánosított n-szögben találunk egy t-jó struktúrát, az incidenciagráfból $\mathcal{T}$ törlésével egy $(q + 1 - t)$-reguláris gráfot kapunk, amiben nem keletkezhettek új körök, azaz a bősége legfeljebb $2n$ marad.

Konstrukciók (k, g)-gráfokra

Egy Levi-gráf megfelelően szimmetrikus részgráfját törölve kaphatunk kisebb (k, g) gráfokat.

Definíció

Egy általánosított sokszögbeli t-jó struktúra egy $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ pár, ahol $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ és $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Továbbá minden $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$-beli ponton t darab $\mathcal{L}_0$-beli egyenes megy át, és fordítva, azaz minden $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$-beli egyenesen t darab $\mathcal{P}_0$-beli pont van.

Ha egy (q, q) rendű általánosított n-szögben találunk egy t-jó struktúrát, az incidenciagráfból $\mathcal{T}$ törlésével egy $(q + 1 - t)$-reguláris gráfot kapunk, amiben nem keletkezhettek új körök, azaz a bősége legfeljebb $2n$ marad.
Ezzel a módszerrel továbbra is páros bőségű (k, g)-gráfokat kapunk.

Páratlan bőségű (k,g)-gráfok konstrukciója

Tudjuk, hogy páratlan $g > 5$-re nincsenek Moore-gráfok. Egy megfelelő módszer ebben az esetben (k, g)-gráfok konstrukciójára, hogy egy páros bőségű struktúrából kiindulva próbálunk gyártani kisebb gráfokat.

Páratlan bőségű (k,g)-gráfok konstrukciója

Tudjuk, hogy páratlan $g > 5$-re nincsenek Moore-gráfok. Egy megfelelő módszer ebben az esetben (k, g)-gráfok konstrukciójára, hogy egy páros bőségű struktúrából kiindulva próbálunk gyártani kisebb gráfokat.
Általában valamilyen részgráfot törlünk, majd okosan veszünk egy párosítást azokon a csúcsokon, amelyek veszítettek a fokszámukból.

Páratlan bőségű (k,g)-gráfok konstrukciója

Tudjuk, hogy páratlan $g > 5$-re nincsenek Moore-gráfok. Egy megfelelő módszer ebben az esetben (k, g)-gráfok konstrukciójára, hogy egy páros bőségű struktúrából kiindulva próbálunk gyártani kisebb gráfokat.
Általában valamilyen részgráfot törlünk, majd okosan veszünk egy párosítást azokon a csúcsokon, amelyek veszítettek a fokszámukból.

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy általánosított négyszög illeszkedési gráfjának t-reguláris feszítőrészgráfja. Ekkor $W \subset V$ egy *törölhető* részhalmaza a csúcsoknak, ha minden $v \in V$-re igaz: Ha v csúcs legalább kettő G-beli szomszédja W-ben van, akkor az összes szomszédja és v is W-ben van.

Páratlan bőségű (k,g)-gráfok konstrukciója

Tudjuk, hogy páratlan $g > 5$-re nincsenek Moore-gráfok. Egy megfelelő módszer ebben az esetben (k, g)-gráfok konstrukciójára, hogy egy páros bőségű struktúrából kiindulva próbálunk gyártani kisebb gráfokat.
Általában valamilyen részgráfot törlünk, majd okosan veszünk egy párosítást azokon a csúcsokon, amelyek veszítettek a fokszámukból.

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy általánosított négyszög illeszkedési gráfjának t-reguláris feszítőrészgráfja. Ekkor $W \subset V$ egy *törölhető* részhalmaza a csúcsoknak, ha minden $v \in V$-re igaz: Ha v csúcs legalább kettő G-beli szomszédja W-ben van, akkor az összes szomszédja és v is W-ben van.

A cél ezzel a módszerrel analóg módon egy általánosított hatszög Levi-gráfjának átalakításával $(k, 11)$-gráf készítése.