Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

p-adikus Galois-reprezentációk

Anderlik Csaba

Témavezető:
Zábrádi Gergely, egyetemi docens

Egyéni kutatómunka
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2022.

Bevezetés

Az egyéni kutatómunkám során megint a (φ, Γ)-modulusokkal foglalkoztam. Azonban most egy másik szemszög néztem a témát, amely nem más, mint a de Rham- és a Hodge-Tate-reprezentációk témaköre és Fontaine periódikus gyűrűi. Majd a végén a geometriai reprezentációk.

A következő pár oldalban próbáltam meg ismertetni a de Rham reprezentációk definícióját és egy pár fontos tulajdonságát, majd a Hodge-Tate reprezentációkról legfontosabb tulajdonságait, állításait írtam le. Majd végül a Fontaine-Mazur sejtés témaköréről írtam egy keveset.

Mindebben a segítségemre volt Jean-Marc Fontaine és Yi Ouyang könyve, melynek címe: The theory of p-adic Galois Repesentations (Fontaine and Ouyang), továbbá Szabó Dávid MSc szakdolgozata, melynek címe: p-adic Galois representations and (φ, Γ)-module (Szabó ((2015))). A geometriai reprezentációkhoz és a Fontaine-Mazur sejtéshez Jean-Marc Fontaine és Barry Mazur könyvét használtam, melynek címe: Geometric Galois representations (Fontaine and Mazur ((1997))).

Mint az első féléves beszámoló dolgozatomban most se szeretném a bizonyításokkal együtt tálalni a fontosabb állításokat, tételeket, mivel akkor nagyon hosszú lenne a dolgozat és lehetséges, hogy kevésbé lehetne átlátható az átnézett téma.

1. fejezet

Hodge-Tate reprezentációk

1.1. Tate-modulus és a Tate csavarás

Legyen K egy tetszőleges test, K^s az ő szeparábilis lezárása, és $G_K := \mathrm{Gal}(K^s/K)$ Galois csoportja, akkor tekintsük a következő egzakt sorozatot:

$$1 \longrightarrow \mu_{l^n}(K^s) \longrightarrow (K^s)^\times \longrightarrow (K^s)^\times \longrightarrow 1,$$

ahol ezen $(K^s)^\times \longrightarrow (K^s)^\times$ leképezés legyen a kövezkező: $a \mapsto a^{l^n}$ és, ahol $\mu_{l^n}(K^s) = \{a \in K^s \quad | \quad a^{l^n} = 1\} \simeq \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$, ha K karakterisztikája nem l, és 1, ha a karakterisztikája l. Ez által ha $\mathrm{char}(K) \neq l$, akkor

$$\mu_{l^{n+1}}(K^s) \longrightarrow \mu_{l^n}(K^s), \quad a \mapsto a^l$$

leképezés egy homomorfizmus, amely megad egy inverz rendszert.

1. Definíció. ($\mathbb{G}_m$-nek a Tate modulusa)

$$T_l(\mathbb{G}_m) := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{l^n}(K^s),$$

ahol $T_l(\mathbb{G}_m)$ egy szabad $\mathbb{Z}_l$ modulus, melynek rangja 1.

Legyen $T_l(\mathbb{G}_m)$ egy fix eleme $t = (\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, akkor, mivel $T_l(\mathbb{G}_m)$ egy szabad $\mathbb{Z}_l$ modulus, melynek rangja 1, így $T_l(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}_l t$. Így $T_l(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}_l(\chi)$ egy szabad $\mathbb{Z}_l$-reprezentációja G_K-nak, melynek rangja 1, mivel minden $g \in G_K$-ra $g(t) = \chi(g)t$, ahol $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_l^\times$ a körosztási karakter. t helyett íráskönnyítés szempontjából írható 1 is, így $T_l(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}_l(1)$ és $V(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}_l(1) = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l(1)$.

2. Definíció. ($r \neq 1$)

1. $\mathbb{Z}_l(-1)$ legyen $\mathbb{Z}_l(1)$ duálisa,

2. $\mathbb{Z}_l(r) = \mathbb{Z}_l(-1)^{\otimes -r}$, ha $r < 0$,

3. $\mathbb{Z}_l(r) = \mathbb{Z}_l(1)^{\otimes r}$, ha $r > 0$,

4. $\mathbb{Z}_l(r) = \mathbb{Z}_l$, ha $r = 0$,

Ez által $\mathbb{Q}_l(r) = \mathbb{Q}_l t^r = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l(r)$ és, mivel minden $g \in G_K$-ra teljesül, hogy $g(t^r) = \chi^r(g)t^r$, így

3. Definíció. (Tate csavarása $\mathbb{Z}_l$-nek) $\mathbb{Q}_l(r) := \mathbb{Q}_l(\chi^r)$, $\mathbb{Z}_l(r) := \mathbb{Z}_l(\chi^r)$. Ezen reprezentációkat nevezzük $\mathbb{Z}_l$ Tate csavarásának.

Továbbá tetszőleges V l-adikus reprezentációnak tudjuk definiálni a Tate csavarását az által, hogy

$$V(r) = V \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathbb{Q}_l(r).$$

1.2. Hodge-Tate reprezentációk

Legyen M egy $\mathbb{Z}_p$-modulus, akkor M-nek az i-edik Tate csavarása a következő:

$$M(i) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i).$$

Megadható egy izomorfizmus $\mathbb{Z}_p$-modulusok között az által, hogy $M \mapsto M(i)$ leképezés egy izomorfizmus. Ha K egy tetszőleges test, K^s az ő szeparábilis lezárása, és $G_K := \mathrm{Gal}(K^s/K)$ Galois csoportja, akkor G_K hat M-en, így $M(i)$-n is hat a következőképpen

$$g(x \otimes u) = g(x) \otimes g(u) = \chi^i(g)g(x) \otimes u.$$

4. Definíció. (A Hodge-Tate gyűrű)

$$B_{HT} := \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} C(i) = C\left[t, \frac{1}{t}\right],$$

ahol t a $T_l(\mathbb{G}_m)$ generátor eleme és $C = \widehat{\overline{K}}$, ahol $c \otimes t^i \in C(i)$, ez által ellátható egy multiplikatív struktúrával. Ekkor B_{HT}-t nevezzük a Hodge-Tate gyűrűnek.

5. Állítás. *B_{HT} gyűrű $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-reguláris, tehát*

1. *B_{HT} integritási tartomány,*

2. *$(Frac(B_{HT}))^{G_K} = B_{HT}^{G_K} = K$,*

3. *minden $b \in B_{HT}$, $b \neq 0$, $g(b) \in \mathbb{Q}_p b$ minden $g \in G_K$, akkor b invertálható.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 136. oldalán. □

6. Definíció. V legyen a G_K Galois-csoport p-adikus reprezentációja. Ezen reprezentáció Hodge-Tate ha B_{HT}-elfogadott.

7. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentáció, akkor $\mathbf{D}_{HT}(V) := (B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. A kanonikus leképezés*

$$\alpha_{HT} : B_{HT} \otimes_K \mathbf{D}_{HT}(V) \to B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

injektív és $dim_K \mathbf{D}_{HT}(V) \leq dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Továbbá akkor és csak akkor egyenlő, ha Hodge-Tate reprezentáció.

Ha V p-adikus reprezentáció, akkor a $\mathbf{D}_{HT}(V)$ egy gradált K-vektortér, mivel

$$\mathbf{D}_{HT}(V) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} gr^i \mathbf{D}_{HT}(V),$$

ahol a $gr^i \mathbf{D}_{HT}(V) = (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G_K$.

8. Definíció. Legyen V egy p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor az i-edik Hodge-Tate számot úgy definiáljuk, hogy

$$h_i := dim_K (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G_K \neq 0.$$

1.3. Sen operátora

Legyen W egy C-reprezentációja egy G Galois-csoportnak, melynek a dimenziója legyen d. Ekkor legyen

$$\widehat{W_\infty} := W^H = \{\omega \quad | \quad \omega \in W \quad , \quad \sigma(\omega) = \omega \quad \forall \sigma \in H\},$$

ha $C^H = \widehat{K_\infty}$, akkor $\widehat{W_\infty}$ egy $\widehat{K_\infty}$-vektortér $\Gamma = Gal(K_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_p$ általi hatással.

9. Tétel.

$$C \otimes_{\widehat{K_\infty}} \widehat{W_\infty} \longrightarrow W$$

ezen természetes leképezés egy izomorfizmus.

10. Tétel. *Minden $r \in \mathbb{N}$-re és W_r egy K_r-reprezentációra, melynek Γ feletti dimenziója d, akkor*

$$\widehat{K_\infty} \otimes_{\widehat{K_r}} W_r \longrightarrow \widehat{W_\infty}$$

leképezés egy izomorfizmus.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 100. oldalán. □

11. Definíció. 1. $\widehat{W}_\infty := \widehat{K}_\infty \otimes_{K_r} W_r$, ahol $W_r := 1 \otimes W_r$.

2. Az $\omega \in \widehat{W}_\infty$ vektort K-végesnek, ha Γ-val generál egy véges dimenziós K-vektorteret. Így definiáljuk W_∞, mint

$$W_\infty := \{w \in \widehat{W}_\infty | \quad w \quad K\text{-véges}\},$$

amely $\widehat{W}_\infty$-nak egy K_∞ altér, amelyen hat a Γ.

12. Állítás. *1.* $W_\infty = K_\infty \otimes_{K_r} W_r$*,*

2. $\widehat{W}_\infty \cong \widehat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W_\infty$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 101. oldalán. □

W legyen egy d dimenziós C-reprezentációja egy G csoportnak. Legyen továbbá W_r-nek egy bázisa $\{e_1, \ldots, e_d\}$ K_r felett, amely W_∞-nek a bázisa is K_∞ felett és W-nak is. Továbbá legyen $\sigma \in \Gamma \mapsto U_\sigma \in \mathrm{GL}_d(K_\infty)$ egy kociklus. Ha $\rho : G \to Aut_C(W)$, akkor $\rho(\gamma_r) = U_{\gamma_r} \in \mathrm{GL}_d(K_r)$, melyre teljesül, hogy $v(U_{\gamma_r} - 1) > c_1 + c_2$. Ha $\sigma \in \Gamma$, $v(U_\sigma - 1) > c_1 + c_2$, akkor

$$log(U_\sigma) := \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{(U_\sigma - 1)^k}{k}$$

konvergál egy $\mathrm{GL}_d(K_r)$ mátrixhoz.

13. Definíció. Legyen $\sigma \in \Gamma$-ra, és legyen $log(\sigma) = log_\gamma(\sigma)$ egy egyértelmű $a \in \mathbb{Z}_p$, melyre $\sigma = \gamma^a$. Minden $g \in G$-re, legyen $log(g) := log(g_\Gamma)$

14. Definíció. Legyen W egy C-reprezentáció, akkor a hozzá tartozó $\Theta = \Theta_W$ operátor, amelyet úgy definiálunk, hogy

$$\Theta = \frac{logU_{\gamma_r}}{log(\gamma_r)} = \frac{logU_\sigma}{log(\sigma)}$$

W_r egy endomorfizmusa a $\{e_1, \ldots, e_d\}$ bázisban.

15. Tétel. *Θ egy egyedi K_∞ lineáris endomorfizmusa W_∞, amely $w \in W_\infty$, létezik egy Γ_w nyílt részcsoportja Γ-nak, melyre*

$$\sigma(w) = \exp(log(\sigma)\Theta)(w),$$

minden $\sigma \in \Gamma_w$-re.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 102. oldalán. □

16. Következmény. *Minden $w \in W_\infty$,*

$$\Theta(w) = \frac{1}{log(\sigma)} \lim_{\substack{t \to 0 \\ p\text{-}padikusan}} \frac{\sigma^t(w) - w}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ p\text{-}padikusan}} \frac{\gamma^t(w) - w}{t},$$

tehát Γ kommutál Θ-val W_∞-n, és G kommutál Θ-val W-n.

17. Következmény. *Minden $w \in W_\infty$. $\Theta(w) = 0$ akkor és csak akkor ha w-nak a Γ-orbitja véges, tehát w stabilizátora Γ-nak egy nyílt részcsoportja.*

18. Következmény. *Legyen W és W' két C-reprezentációja G-nak.*

1. $\Theta_{W \oplus W'} = \Theta_W \oplus \Theta_{W'}$,
2. $\Theta_{W \otimes W'} = \Theta_W \otimes \Theta_{W'}$,
3. $\Theta_{Hom(W,W')} = (f \mapsto f\Theta_W - f\Theta_{W'})$, *hiányzik*
4. *Ha W' egy rész-reprezentációja W-nak, akkor $\Theta_{W'} = \Theta_{W|W'}$.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 103. oldalán. □

19. Állítás. *W_∞-nek létezik egy olyan bázisa, amelyhez tartozó Θ operátor mátrixának együtthatói K-beliek.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 103. oldalán. □

20. Tétel. *Θ magja egy C-altere W-nak és, amely G invariáns elemek által van generálva, tehát $Ker\Theta = C \otimes_K W^G$*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 104. oldalán. □

21. Következmény. *Legyen V egy p-adikus reprezentációja K-nak, akkor V C-elfogadott akkor és csak akkor ha a Sen operátora $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-nek identikusan nulla.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 104. oldalán. □

22. Állítás. *Legyen V egy p-adikus reprezentáció. Vegyük a Sen operátorát a $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ reprezentációnak, ha féligegyszerű és a sajátértékei $\mathbb{Z}$-beliek, akkor az ad egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy V Hodge-Tate reprezentáció.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 137. oldalán. □

1.4. de Rham reprezentációk

Legyen R az előző félévben definiált gyűrű, akkor a Witt vektor gyűrűje előállítható a következőképpen:

$$W(R) = \varprojlim_{f_n} W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}/p}),$$

ahol $f_n : (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_0^p, x_1^p, \ldots, x_{n-1}^p)$, amely $W_{n+1}(\mathcal{O}_{\overline{K}/p})$-ből $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}/p})$-be képez. Továbbá minden n-re tudjuk definiálni a következő leképezéset:

$$w_{n+1} : W_{n+1}(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{O}_C,$$

amely $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$-t $a_0^{p^n} + pa_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n a_n$. Ezen leképezés által és az inverz limeszben definiált f_n által tudunk egy gyűrű homomorfizmust definiálni $W(R)$-ből $\mathcal{O}_C$-be úgy, hogy

$$\theta : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)},$$

ahol $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in W(R)$, és $x_n^{(m)} \in \mathcal{O}_C$.

23. Lemma. *1. Ezen θ egy W-algebra homomorfizmus, amely kommutál a G_{K_0} általi hatással,*

2. θ szürjektív,

3. a θ magja főideál, melyet egy ξ elem generál, ahol $\xi := [\mathfrak{w}] + p = (\mathfrak{w}, 1, 0, \ldots) \in W(R), \mathfrak{w}^{(0)} = -p$,

4. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (Ker\theta)^n = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a Fontaine and Ouyang könyvének 139.-140. oldalain. □

Legyen $K_0 = W\left[\frac{1}{p}\right]$, akkor

$$W(R)\left[\frac{1}{p}\right] = K_0 \otimes_W W(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W(R)p^{-n} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} W(R)p^{-n}.$$

24. Definíció. 1. B_{dR}^+ gyűrű definiáljuk, mint a $W(R)\left[\frac{1}{p}\right]$-nak a $Ker\theta$ szerinti p-adikus telítése, amely azt jelenti, hogy

$$B_{dR}^+ := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W(R)\left[\frac{1}{p}\right]/(Ker\theta)^n = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W(R)\left[\frac{1}{p}\right]/(\xi)^n.$$

2. Továbbá B_{dR} legyen a B_{dR}^+ hányadosteste, tehát

$$B_{dR} := FracB_{dR}^+ = B_{dR}^+\left[\frac{1}{\xi}\right].$$

25. Lemma. *B_{dR}^+ egy teljes, diszkrét értékelési gyűrű, melynek maradékteste C, melyen hat G_{K_0}. Továbbá B_{dR} egy értékelési test.*

26. Definíció. Minden $i \in \mathbb{Z}$-re legyen $Fil^i B_{dR}$ egy szabad B_{dR}^+-modulus, melyet ξ^i generál. Akkor definiálhatunk B_{dR}-en egy filtrálást, amelyre teljesülnek a következők:

1. csökkenő filtrálás, tehát
$$\ldots \supset Fil^i B_{dR} = B_{dR}^+ \xi^i \supset Fil^{i+1} B_{dR} \supset \ldots,$$
2. szeparábilis filtrálás, tehát
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} Fil^i B_{dR} = 0,$$
3. továbbá teljesül, hogy
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} Fil^i B_{dR} = B_{dR}.$$

A $Fil^0 B_{dR} = B_{dR}^+$, és minden i-re $Fil^i B_{dR} = \mathfrak{m}^i_{B_{dR}^+}$ lesz, ahol $\mathfrak{m}^i_{B_{dR}^+}$ az pont a B_{dR}^+ maximális ideáljának i-edik hatványa.

Továbbá az értékelést tudjuk az alapján definiálni, hogy melyik legkisebb i-re található benne a filtrációban, tehát
$$x \in Fil^i B_{dR}, \quad \text{de } x \notin Fil^{i+1} B_{dR} \quad \Rightarrow \quad v_{dR}(x) = i.$$
Továbbá ha $x \notin B_{dR}$-nak, akkor meg $v_{dR}(x) = \infty$.

27. Lemma. *$\overline{K}$ B_{dR}^+-nak egy altere, amely megőrzi a Galois hatást, és $\overline{K} \cap Fil^1 B_{dR} = 0$.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 142. oldalán. □

Legyen $\epsilon \in R$, amelyre teljesül, hogy $\epsilon^{(0)} = 1$ és $\epsilon^{(1)} \neq 1$, ekkor legyen $\pi = [\epsilon] - 1 \in W(R)$, mivel $\theta([\epsilon] - 1) = \epsilon^{(0)} - 1 = 0$, így $Fil^1 B_{dR}$-nek eleme lesz $[\epsilon] - 1$. Ez által
$$(-1)^{n+1} \frac{([\epsilon] - 1)^n}{n} \quad \in W(R) \left[\frac{1}{p}\right] \xi^n,$$
tehát
$$log[\epsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon] - 1)^n}{n} \in B_{dR}^+.$$

28. Állítás. *Legyen $t = log[\epsilon]$, akkor $t \in Fil^1 B_{dR}$, de $t \notin Fil^2 B_{dR}$. Tehát t generálja a B_{dR}^+ maximális ideálját.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 144. oldalán. □

Az $\epsilon^{\mathbb{Z}_p}$ multiplikatív modulusa izomorf a $T_p(\mathbb{G}_m) = Z_p(1)$ Tate-modulussal, mint G_{K_0}-modulussal. A $\mathbb{Z}_p(1)$ Tate-modulusra lehet gondolni, mint $\mathbb{Z}_p t \subset B_{dR}^+$, mivel

$$log([\epsilon^\lambda]) = log([\epsilon]^\lambda) = \lambda log([\epsilon]) = \lambda t.$$

és minden $g \in G_{K_0}$, $g(t) = \chi(g)t$, ahol χ körosztási karakter. Továbbá

$$\begin{aligned} Fil^i B_{dR} &= B_{dR}^+ t^i = B_{dR}^+(i), \\ B_{dR} &= B_{dR}^+ \left[\frac{1}{t}\right] = B_{dR}^+ \left[\frac{1}{\xi}\right], \end{aligned}$$

így

$$grB_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} gr^i B_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Fil^i B_{dR}/Fil^{i+1} B_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_{dR}^+(i)/tB_{dR}^+(i) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(i).$$

Ebből következik a következő állítás, hogy

29. Állítás. $grB_{dR} = B_{HT} = C\left[t, \frac{1}{t}\right] \subset \widehat{B_{HT}} = C((t))$

Legyen V egy p-adikus Galois reprezentációja K, és ρ a hozzá tartozó homomorfizmus.

30. Állítás. *Ha K algebrailag zárt, $\Theta = 0$ teljesül akkor és csak akkor $\rho(G_K)$ véges. Általánosságban, $\Theta = 0$ akkor és csak akkor $\rho(I_K)$ is véges.*

31. Állítás. *V p-adikus reprezentációja G_K-nak C-elfogadott akkor és csak akkor ha az I_K-nak a hatása V diszkrét.*

32. Következmény. *V egy 1-dimenziós p-adikus reprezentációja K-nak, akkor $V = \mathbb{Q}_p(\eta)$, ahol $\eta : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ egy folytonos homomorfizmus. $\mathbb{Q}_p(\eta)$ C-elfogadott akkor és csak akkor ha $\eta(I_K)$ véges. Ha $C(\eta) = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\eta)$, akkor*

$$C(\eta)^{G_K} = \begin{cases} = 0 & ,\text{ha } \eta(I_K) \text{ nem véges}, \\ \cong K, & ,\text{ha } \eta(I_K) \text{ véges}, \end{cases}$$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 105. oldalán. □

33. Állítás. $B_{dR}^{G_K} = K$.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 145. oldalán. □

34. Definíció. V p-adikus reprezentációja G_K-nak akkor és csak akkor de Rham, ha B_{dR}-elfogadott, tehát $\alpha_{dR}(V)$ izomorfizmus.

Jelöljük a kategóriáját K-hoz tartozó de Rham p-adikus Galois reprezentációit: $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{dR}(G_K)$

35. Lemma. *V de Rham reprezentáció akkor és csak akkor, ha*

$$dim_K \mathbf{D}_{dR}(V) = dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Ha V p-adikus reprezentációja G_K-nak, akkor $\mathbf{D}_{dR}(V)$ egy filtrált K-vektortér, amelynél az i-edik filtrált:

$$Fil^i \mathbf{D}_{dR}(V) := (Fil^i B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Vegyük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \to Fil^{i+1} B_{dR} \to Fil^i B_{dR} \to C(i) \to 0,$$

tenzorozuk meg V-vel, akkor kapjuk, hogy

$$0 \to Fil^{i+1} B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to Fil^i B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0.$$

Ez után vegyük G_K általi invaránsát, tehát azon elemeket, amelyet G_K fixál, akkor kapjuk, hogy

$$0 \to Fil^{i+1} \mathbf{D}_{dR}(V) \to Fil^i \mathbf{D}_{dR}(V) \to (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Akkor az i-edik gradáltja $\mathbf{D}_{dR}(V)$-nek a következő lesz:

$$gr^i \mathbf{D}_{dR}(V) = Fil^{i+1} \mathbf{D}_{dR}(V) / Fil^i \mathbf{D}_{dR}(V) \hookrightarrow (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Ekkor ez által

$$gr^{\mathbf{D}}_{dR}(V) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} gr^i \mathbf{D}_{dR}(V) \hookrightarrow \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{HT}(V).$$

36. Állítás. *Ha V p-adikus reprezentáció de Rham, akkor V Hodge-tate reprezentáció és*

$$gr^i \mathbf{D}_{dR}(V) = (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}, \qquad gr \mathbf{D}_{dR}(V) = \mathbf{D}_{HT}(V).$$

A bizonyítást az előbb beláttuk.

37. Tétel. *A $\mathbf{D}_{dR} : \mathbf{Rep}^{dR}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathbf{Fil}_K$ egy egzakt, hűséges és tenzor funktor.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 148. oldalán. □

38. Állítás. *Legyen V p-adikus reprezentáció de Rham, akkor V Hodge-Tate is lesz. Továbbá*

$$dim_K(\mathbf{D}_d R(V)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} dim_K(gr^i \mathbf{D}_{dR}(V)).$$

39. Állítás. *Legyen K véges bővítése $\mathbb{Q}_p$-nek. Ha $i \in \mathbb{Z}$, akkor*

1. *ha $i \neq 0$, akkor $H^n(G_K, C(i)) = 0$ minden n-re,*

2. *ha $i = 0$, akkor $H^n(G_K, C) = 0$ ha $n \geq 1$, $H^0(G_K, C) = K$ és $H^1(G_K, C)$ egy 1 dimenziós K-vektortér, melyet $log\chi \in H^1(G_K, \mathbb{Q}_p)$,*

3. *A csésze szorzat $(x \mapsto x \cup log\chi)$ definiál egy izomorfizmust $H^0(G_K, C) \simeq H^1(G_K, C)$.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 102. oldalán. (Fontaine-féle) □

40. Állítás. *Legyen $i < j \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, akkor ha $i \geq 1$ vagy $j \leq 0$ és*

$$H^1(G_K, t^i B_{dR^+}/t^j B_{dR^+}) = 0.$$

Továbbá ha $i \leq 0$ vagy $j > 0$, akkor

$$x \mapsto x \cup log\chi$$

leképezés ad egy következő izomorfizmust

$$H^0(G_K, t^i B_{dR^+}/t^j B_{dR^+})(\simeq K) \to H^1(G_K, t^i B_{dR^+}/t^j B_{dR^+}).$$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 149. oldalán. □

41. Állítás. 1. *Létezik egy olyan V p-adikus reprezentációja G_K-nak, amelyre teljesül, hogy egy nem triviális bővítése $\mathbb{Q}_p(1)$-nek $\mathbb{Q}_p$-vel, azt jelenti, hogy létezik egy nem hasadó egzakt sorozata a p-adikus reprezentációknak, tehát*

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to V \to \mathbb{Q}_p(1) \to 0.$$

2. *Egy ilyen V reprezentáció Hodge-Tate lesz,*

3. *Egy ilyen V reprezentáció nem lesz de Rham.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Fontaine and Ouyang könyvének 150. oldalán. □

Ha létezik egy ilyen egzakt sorozat

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to V \to \mathbb{Q}_p \to 0.,$$

akkor a $(B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} -)^{G_K}$ funktor indukál egy következő hosszú egzakt sorozatot

$$\begin{aligned} 0 &\to (tB_{dR}^+)^{G_K}(= 0) \to (B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \\ &\to (B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(1))^{G_K}(= K) \to H^1(G_K, tB_{dR}^+) \to \dots. \end{aligned}$$

Továbbá, mivel $H^1(G_K, tB_{dR}^+) = 0$, így

$$\mathbf{D}_{dR}(V) \to (B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \to \mathbf{D}_{dR}(\mathbb{Q}_p) \to 0$$

szürjektív, tehát V de Rham.

42. Tétel. *Legyen K egy p-adikus test, melyen X egy projektív, sima, algebrai varietás és l egy prímszám. Ha nézzük a $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ étale kohomológia csoportot, mint G_K-nak egy p-adikus reprezentációját, akkor ezen reprezentáció de Rham lesz és*

$$\mathbf{D}_{dR}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \simeq H^m_{dR}(X/K),$$

kanonikus izomorfizmus, amely azt mutatja, hogy ezen X varietáshoz tartozó de Rham kohomológia csoporttal lesz izomorf a filtrált K-vektorterek. Továbbá teljesül a következő egyenlőség

$$B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) = B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{dR}(X/K).$$

43. Definíció. Legyen V egy l-adikus reprezentációja G_K-nak. Ezen reprezentáció geometriai ha

1. V nem-elágazó véges sok p-től eltekintve, tehát ha

   $$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to Aut_{\mathbb{Q}_l}(V)$$

   reprezentáció, akkor $\rho(I_p) = 1$ véges sok p-n kívűl.

2. Ha $p = l$, akkor a reprezentáció de Rham.

Fontaine-nek és Mazur-nak létezik egy híres sejtése, amely pont ezen geometriai reprezentációkról szól. Ezen sejtés úgy szól, hogy Az összes geometriai reprezentáció pontosan azon reprezentáció, amelyek az algebrai geometriából származnak. Fontaine and Mazur ((1997)) cikk alapján egy folytonos, irreducibilis $\mathbb{Q}_p$-reprezentációja G_K-nak, akkor származik az algebrai geometriából, ha izomorf egy étale kohomológia-csoport egy részfaktorával, ahol a csoport együtthatói $\mathbb{Q}_p(r)$-ből származnak.

Irodalomjegyzék

J.-M. Fontaine and B. Mazur. Geometric Galois representations, 1997. Elérhető: https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/mazur.pdf, Megjelent: in Coates, John; Yau., S.-T. (eds.), Elliptic curves, modular forms, Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Series in Number Theory, vol. 1, Int. Press, Cambridge, MA, pp. 41–78.

J.-M. Fontaine and Y. Ouyang. Theory of p-adic Galois Representations. Elérhető: Az Ouyang féle jegyzet:http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/galoisrep.pdf , A Fontaine féle jegyzet:https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf.

D. Szabó. p-adic Galois representations and (φ, Γ)-modules, 2015. Elérhető: https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_mat/2015/szabo_david.pdf.