p-adikus Galois reprezentációk

Egyéni kutatómunka

Anderlik Csaba

Témavezető:
Zábrádi Gergely
egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, Május 2023

Motivációk és Alkalmazások 1.: Fontaine-Mazur sejtés

Geometriai-reprezentáció

Legyen V egy l-adikus reprezentációja $G_{\mathbb{Q}}$-nak. Ezen reprezentáció geometriai, ha

1. V nem-elágazó véges sok p'-től eltekintve, tehát ha

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to Aut_{\mathbb{Q}_l}(V)$$

   reprezentáció, akkor $\rho(I_p) = 1$ véges sok p-n kívűl.

2. Ha $p = l$, akkor a reprezentáció de Rham.

Fontaine-Mazur sejtés

Egy irreducibilis p-adikus reprezentáció akkor és csak akkor geometria, ha algebrai geometriából származik.

Fontaine and Mazur [1997] cikkjének alapján.

Motivációk és Alkalmazások 2.: p-adikus Hodge-elmélet

Faltings tétele

Legyen $\mathbb{C}_K$ a p-adikus telítése $\overline{K}$, ahol K egy p-adikus test. Legyen X egy megfelelő sima varietás K felett, akkor létezik egy ilyen izomorfizmus

$$H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega^j_{X/K}) \otimes_K \mathbb{C}_K(-j),$$

amely felcserélhető a Γ_K általi hatással.

Hong [2020] előadás jegyzete alapján.

Motivációk és Alkalmazások 3.: Iwasawa-elmélet

Legyen V egy p-adikus reprezentációja az abszolút Galois csoportnak, akkor ha $l \neq p$ tudunk definiálni egy L-függvényt, amelynek l-beli lokális alakja a következő:

$$L_l(V,s) := det(Id - (Frob_l^{-1}(l^{-s}))_{|V^{I_l}})^{-1},$$

továbbá a p-beli lokális alakja

$$L_p(V,s) := det((Id - \varphi^{-1}(p^{-s}))_{|\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)})^{-1}.$$

Ez által az L-függvény globálisan úgy néz ki, hogy

$$L(V,s) = \prod_l L_l(V,s).$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{Galois representations}\} \arrow[r] \arrow[d] & \{L\text{-functions}\} \arrow[d] \\
\{\text{Galois cohomology}\} & \{p\text{-adic } L\text{-functions}\} \arrow[l, "\text{IMC}"']
\end{tikzcd}$$

Figure: Iwasawa elmélet fő sejtése, Jacinto and Williams

Példa: p-adikus Galois reprezentációra 1.

Legyen char$K \neq 2, 3$ és $f(X) \in K[X]$, $deg(f) = 3$, amely szeparábilis, akkor $f(x) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$ különböző gyökökkel. Ez által az f-hez tarozó elliptikus görbe $Y^2 = f(X)$, tehát $E(K^s) := \{(x, y) \in (K^s)^2 | y^2 = f(x)\} \cup \{\infty\}$.

$$0 \to E[l^n] \to E(K^s) \to E(K^s) \to 0.$$

Ha char$K \neq l$, akkor $E[l^n] \cong (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^2$, és ha char$K = l$, akkor vagy $E[l^n] \cong (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ vagy $E[l^n] = O$. Ekkor a Tate modulusa az elliptikus görbénknek a következő lesz:

$$T_l(E) = \varprojlim_n E[l^n] = \mathbb{Z}_l^2$$

ha char$K \neq l$, különben meg 0 vagy $T_l(E) = \mathbb{Z}_l$. Így $V_l(E) = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} T_l(E) = \mathbb{Q}_l^2$ lesz a l-adikus Galois reprezentációja.

Példa: p-adikus Galois reprezentációra 2.

Legyen A egy Abel varietás, tehát egy projektív, sima varietás, melyen legyen egy csoport struktúra. Továbbá legyen g a dimenziója, akkor

1. $A(K^s)$ egy Abel csoport,
2. $A[l^n] \cong (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^{2g}$ ha char$K \neq l$, és ha char$K = l$, akkor $A[l^n] \cong (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^r$, ahol $0 \leq r \leq g$.

Ez által

$$T_l(A) = \varprojlim_n A[l^n] \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_l^{2g} & , \text{ ha char} K \neq l, \\ \mathbb{Z}_l^r & , \text{ ha char} K = l. \end{cases}$$

Ebből megadható a l-adikus reprezentációjuk:

$$V_l(A) = \begin{cases} \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l^{2g} = \mathbb{Q}_l^{2g} & , \text{ ha char} K \neq l, \\ \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l^r = \mathbb{Q}_l^r & , \text{ ha char} K = l. \end{cases}$$

Példa: Tate görbe, bevezetés 1.

Silverman [1994] könyvéből használjuk a következő tételt: Legyen K egy p-adikus test $|\cdot|$ abszolút értékkel és legyen $q \in K^\times$, melyre teljesül, hogy $|q| < 1$. Továbbá legyen $s_k(q) := \sum_{n \geq 1} \frac{n^k q^n}{1-q^n}$, $a_4(q) = -s_3(q)$ és $a_6(q) = -\frac{5s_3(q)+5s_5(q)}{12}$. Ekkor a Tate görbét tudjuk úgy definiálni, hogy $E_q : y^2 + xy = x^3 + a_4(q)x + a_6(q)$.

Theorem

1. *A következő két sor konvergens lesz minden $u \in \overline{K}$, $u \neq q^{\mathbb{Z}}$:*

$$X(u,q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^n u}{(1-q^n)^2} - 2s_1(q),$$

$$Y(u,q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(q^n u)^2}{(1-q^n u)^3} + s_1(q).$$

2. *A következő szürjektív homomorfizmusnak a magja a $q^{\mathbb{Z}}$.*

Példa: Tate görbe, bevezetés 2.

Theorem

, ahol a leképezés a következő

$$\alpha : \overline{K}^{\times} \to E_q(\overline{K})$$
$$u \mapsto \begin{cases} (X(u,q), Y(u,q)), & \text{ha } u \notin q^{\mathbb{Z}} \\ 0, & \text{ha } u \in q^{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Az α leképezés felcserélhető $G_{\overline{K}/K}$ csoport általi hatással ($\alpha(g(q)u) = g(\alpha(u))$). Továbbá ha L egy algebrai bővítése K-nak, akkor az indukál egy izomorfizmust:

$$\alpha : L^{\times}/q^{\mathbb{Z}} \mapsto E_q(L).$$

Továbbá α indukál egy izomorfizmust az elliptikus görbénk p^n-rendű pontjain is, ha $L = \overline{K}$.

Példa: Tate görbe 3.

1. $0 \to \mu_{p^n}(\overline{K}) \to E_q[p^n] \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to 0$ egzakt sorozat felírható,
2. Vegyük az inverz limeszüket, akkor kapjuk a következő egzakt sorozatot:

$$0 \to \mathbb{Z}_p(1) \to T_p(E_q) \to \mathbb{Z}_p \to 0.$$

G_K *hatása*

Legyen $\epsilon^{(0)} = 1, \epsilon^{(1)} \neq 1, \left(\epsilon^{(n+1)}\right)^p = \epsilon^{(n)}$, ahol $\epsilon^{(n)} \in \overline{K}$ és $q^{(0)} = q, \left(q^{(n+1)}\right)^p = q^{(n)}$. Ekkor $\alpha(\epsilon^{(n)}), \alpha(q^{(n)})$ egy bázisát adják $E_q(\overline{K})[p^n]$-nek. Legyen $e := \alpha(\varprojlim_n \epsilon^{(n)})$, $f := \alpha(\varprojlim_n q^{(n)})$, ekkor tetszőleges $g \in G_K$ esetén $g(e) = \chi(g)e$, $g(f) = f + c(g)e$, ahol χ a körosztási karakter, $c(g) \in \mathbb{Z}_p$. Így a g általi hatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \chi(g) & c(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Példa: Tate görbe 4.

Legyen V az E_q elliptikus görbénk p-adikus reprezentációja: $V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(E_q)$. Vizsgáljuk meg a de Rham (φ, Γ)-modulusát $\mathbf{D}_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes V)^{G_K}$. Legyen $t = log([\epsilon]) \in B_{dR}$, $g(t) = \chi(g)t$, így $\mathbf{D}_{dR}(V)$ elemei $x := t^{-1} \otimes e$ alakúak, mivel tetszőleges $g \in G_K$ esetén $g(x) = t \otimes e$. Továbbá, mivel e, f egy bázisát adják E_q Tate modulusának, így $y := a \otimes e + 1 \otimes f$ x-szel együtt egy bázisát adja $\mathbf{D}_{dR}(V)$-nek. y stabil kell legyen minden $g \in G_K$ elemmel való hatásra.

Tate görbe de Rham reprezentációja, (φ, Γ)-modulusa

1. $V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(E_q)$,
2. $\mathbf{D}_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes V)^{G_K}$.

Példa: Tate görbe 5.

Be szeretnénk látni, hogy V nem csak p-adikus reprezentáció lesz, hanem de Rham is, tehát Hodge-Tate is, mivel de Rham-ság implikálja a Hodge-Tate-séget. Ahhoz, hogy belássuk, hogy V de Rham, ahhoz kell, hogy y stabil legyen minden $g \in G_K$ elemmel való hatásra, tehát $(g(a)\chi(g) + c(g)) = a$.
Legyen $\tilde{q} \in R(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K})$, melyre teljesül, hogy $\tilde{q} = (q^{(0)}, q^{(1)}, \dots)$, ekkor $g(\tilde{q}) = q\epsilon^{c(g)}$. Ha $u := log([\tilde{q}])$-nak definiáljuk, akkor tetszőleges $g \in G_K$ esetén $g(u) = u + c(g)t$, így ha $a = -ut^{-1}$, akkor $(g(a)\chi(g) + c(g)) = -ut^{-1} = a$, így beláttuk, hogy V de Rham.

Bázis

de Rham (φ, Γ)-modulus bázis lesz a $t^{-1} \otimes e$, $-ut^{-1} \otimes e + 1 \otimes f$.

A Tate görbéről leírtakhoz Abhinandan [2018] MSc dolgozatát használtam.

Bibliográfia I

Abhinandan. p-adic Galois representations and elliptic curves, 2018. Elérhető: https://www.math.u-bordeaux.fr/~ybilu/algant/documents/theses/Abhinandan.pdf#page58.

J.-M. Fontaine and B. Mazur. Geometric Galois representations, 1997. Elérhető: https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/mazur.pdf, Megjelent: in Coates, John; Yau., S.-T. (eds.), Elliptic curves, modular forms, Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Series in Number Theory, vol. 1, Int. Press, Cambridge, MA, pp. 41–78.

S. Hong. Notes on p-adic Hodge theory, 2020. Elérhető: http://www-personal.umich.edu/~serinh/Notes%20on%20p-adic%20Hodge%20theory.pdf.

Bibliográfia II

J. R. Jacinto and C. Williams. An introduction to p-adic L-functions. Elérhető: https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/cwilliams/lecturenotes/lecture_notes_part_i.pdf.

J. H. Silverman. The arithmetic of elliptic curves, 1994.