Jelzéses játékok

Bevezetés

A jelzéses játékok olyan 2 személyes, nem teljes információs játékok, amelyekben az egyik játékos birtokában van egy olyan információnak, amit a másik játékos nem ismer. Az a játékos, amelyik rendelkezik az információval, jelzést küld a másik játékosnak, aki ez alapján cselekszik. Formálisan (diszkrét, véges játékra):

- legyen az első játékos ($P1$) az, aki ismeri a második játékos ($P2$) által nem tudott információt
- ez az információ $P1$ típusa, valamilyen $t \in T$, ahol T egy véges halmaz. A t értékét egy mindkét játékos számára ismert ρ valószínűség-eloszlás szerint választja a természet T-ből.
- $P1$, ismerve t-t, választ egy m jelzést M véges halmazból és elküldi $P2$-nek
- lehetséges, hogy m függ $P1$ típusától, $M(t)$-vel jelölhetjük a t típus által küldhető jelzések halmazát és $T(m)$-mel azoknak a típusoknak a halmazát, amelyek elküldhetik az m jelzést (ez nem minden jelzéses játékban van így, mi most csak olyanokkal foglalkozunk, ahol m független t-től)
- $P2$, miután megtudta m-et, választ egy r cselekedetet R véges halmazból (itt is lehetséges, hogy r függ m-től, de nem fogunk ilyen játékokkal sem foglalkozni)
- a játék itt véget ér, $P1$ és $P2$ haszna leírható az $u(t, m, r)$ és $v(t, m, r)$ kifizetésfüggvényekkel

Példák

1. $P1$ egy használt autó tulajdonosa, amit szeretne eladni $P2$-nek. $P1$ tudja, hogy milyen állapotú az autó, $T = \{\text{jó, rossz}\}$, $P2$ nem tudja. $P1$, hogy igazolja az autó jó állapotát, adhat garanciát, ez lesz az m jelzés. Ezután $P2$ eldöntheti, hogy megveszi-e az autót vagy nem, azaz $R = \{\text{megveszi, nem veszi meg}\}$.
2. $P1$ egy állásra jelentkezik, $P2$ a munkáltató. Csak $P1$ tudja, hogy alkalmas-e a munkára, de ezt igazolhatja például diplomával (jelzés). $P2$ eldöntheti, hogy felveszi-e, vagy nem.
3. Sör-limonádé játék, erről egy kicsit bővebben a következő részben.

Sör-limonádé játék

A sör-limonádé játékban $P1$ kétféle típusú lehet, erős vagy gyenge, tehát $T = \{t_1 =\text{erős},\ t_2 =\text{gyenge}\}$. Ezt a természet választja, $P1$ $0,9$ valószínűséggel erős, $0,1$ valószínűséggel gyenge, azaz $\rho(t_1) = 0,9$ és $\rho(t_2) = 0,1$ ($P1$ ismeri a saját típusát). $P1$ bemegy egy kocsmába és eldönti, hogy sört, vagy limonádét rendel. Ez lesz a jelzések halmaza, $M = \{m_1 =\text{sör},\ m_2 =\text{limonádé}\}$. Ha erős, akkor jobban szereti a sört, ha gyenge, akkor a limonádét, de bármelyik típusú játékos választhatja bármelyik italt (tehát itt m független t-től). Viszont ha $P1$ az általa kedvelt italt választja, akkor a haszna 1, egyébként 0.
$P1$ a kocsmában találkozik $P2$-vel. $P2$ nem tudja $P1$ típusát, viszont látja, hogy mit iszik. Ez alapján el kell döntenie, hogy beleköt-e vagy nem, tehát $R = \{r_1 =\text{beleköt},\ r_2 =\text{nem köt bele}\}$. $P2$ haszna 1, ha $P1$ gyenge és beleköt, vagy ha $P1$ erős és nem köt bele, egyébként 0. $P1$ mindenképpen szeretné elkerülni a konfliktust, a haszna 2, ha nem kötnek bele, egyébként 0.
Ahhoz, hogy a játékban megérthessük az egyensúlyokat, néhány fogalmat és jelölést be kell vezetnünk.

- jelöljük $P1$ viselkedési stratégiáit $\sigma_1(t,m)$-mel, ahol $\sigma_1(t,\cdot)$ minden t-re egy valószínűség-eloszlás $M(t)$-n. Ez azt jelenti, hogy t $\sigma_1(t,m)$ valószínűséggel küldi m jelzést.

- jelöljük $P2$ viselkedési stratégiáit $\sigma_2(m,r)$-rel, ahol $\sigma_2(m,\cdot)$ minden m-re egy valószínűség-eloszlás $R(m)$-en. Azaz $P2$, ha m jelzést látja $\sigma_2(m,r)$ valószínűséggel választja r cselekedetet.

σ_1 és σ_2 viselkedési stratégiák akkor és csak akkor vannak Nash-egyensúlyban, ha
$\sigma_1(t,m) > 0$ esetén

$$\sum_r \sigma_2(m,r)u(t,m,r) = \max_{m'\in M}\Big(\sum_r \sigma_2(m',r)u(t,m',r)\Big)$$

és minden m-re, amire $\sum_t \sigma_1(t,m)\rho(t) > 0$, $\sigma_2(m,r) > 0$ esetén

$$\sum_t \mu(t;m)v(t,m,r) = \max_{r'} \sum_t \mu(t;m)v(t,m,r')$$

ahol

$$\mu(t;m) := \frac{\sigma_1(t,m)\rho(t)}{\sum_{t'} \sigma_1(t',m)\rho(t')}$$

, ha $\sum_t \sigma_1(t,m)\rho(t) > 0$.

Ez azt jelenti, hogy σ_1 egy legjobb válasz σ_2-re és σ_2 egy feltételes legjobb válasz σ_1-re, olyan értelemben, hogy $\mu(t;m)$ az a valószínűség, hogy $P1$ t típusú, feltéve, hogy m jelzést küldte el. $\mu(\cdot;m)$ kiszámolásához a Bayes-tételt használjuk. Így $\sigma_2(m,\cdot)$ egy feltételes legjobb válasz, ha a jelzés m.

Térjünk vissza most a sör-limonádé játékra. Két Nash-egyensúly lesz. Az egyik esetben $P1$ mindenképpen sört iszik, függetlenül attól, hogy erős vagy gyenge. Ekkor $\sigma_1(t_i, m_1) = 1$ és $\sigma_1(t_i, m_2) = 0$, ha $i = 1, 2$.
Ebből kapjuk, hogy

$$\mu(t_1; m_1) = \frac{\sigma_1(t_1, m_1)\rho(t_1)}{\sigma_1(t_1, m_1)\rho(t_1) + \sigma_1(t_2, m_1)\rho(t_2)} = \frac{0,9}{1} = 0,9$$

és hasonlóan

$$\mu(t_2; m_1) = \frac{\sigma_1(t_2, m_1)\rho(t_2)}{\sigma_1(t_1, m_1)\rho(t_1) + \sigma_1(t_2, m_1)\rho(t_2)} = \frac{0,1}{1} = 0,1.$$

Mivel $\mu(t_1; m_1)v(t_1, m_1, r_1) + \mu(t_2; m_1)v(t_2, m_1, r_1) = 0,9 \cdot 0 + 0,1 \cdot 1 = 0,1$ és $\mu(t_1; m_1)v(t_1, m_1, r_2) + \mu(t_2; m_1)v(t_2, m_1, r_2) = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot 0 = 0,9$, azt kapjuk, hogy $\sigma_2(m_1, r_1) = 0$ és $\sigma_2(m_1, r_2) = 1$. Azaz $P2$ soha nem köt bele $P1$-be, ha látja, hogy $P1$ sört iszik.
Ahhoz, hogy ez tényleg Nash-egyensúly legyen, az kell, hogy $P1$-nek ne érje meg soha sör helyett limonádét inni. Persze ha $P1$ erős, akkor könnyen látszik, hogy jobban jár, ha mindig sört iszik, ugyanis:

$$\sigma_2(m_2, r_1)u(t_1, m_2, r_1) + \sigma_2(m_2, r_2)u(t_1, m_2, r_2) = \sigma_2(m_2, r_1) \cdot 0 + \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 2 = \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 2 <$$

$$< \sigma_2(m_1, r_1)u(t_1, m_1, r_1) + \sigma_2(m_1, r_2)u(t_1, m_1, r_2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 3$$

mindig teljesül. Ha $P1$ gyenge, akkor a

$$\sigma_2(m_2, r_1)u(t_2, m_2, r_1) + \sigma_2(m_2, r_2)u(t_2, m_2, r_2) = \sigma_2(m_2, r_1) \cdot 1 + \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 3 <$$

$$< \sigma_2(m_1, r_1)u(t_2, m_1, r_1) + \sigma_2(m_1, r_2)u(t_2, m_1, r_2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel $\sigma_2(m_2, r_1) = 1 - \sigma_2(m_2, r_2)$, az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy $\sigma_2(m_2, r_1) > 1/2$. Tehát ha $P2$ több, mint $1/2$ valószínűséggel beleköt egy limonádé-ivó $P1$-be, akkor tényleg Nash-egyensúlyt kapunk.
A másik Nash-egyensúlyban csak annyi változik, hogy $P1$ típusától függetlenül mindig limonádét rendel, ez ugyanígy kiszámolható.
Azt kell még meggondolni, hogy más Nash-egyensúly nincs. $P1$ egy olyan viselkedési stratégiájára, ahol $\sigma_1(t_i, m_j) > 0$ minden $i = 1, 2$-re és $j = 1, 2$-re azt kapnánk, hogy

$$\sigma_2(m_1, r_1)u(t_1, m_1, r_1) + \sigma_2(m_1, r_2)u(t_1, m_1, r_2) = \sigma_2(m_2, r_1)u(t_1, m_2, r_1) + \sigma_2(m_2, r_2)u(t_1, m_2, r_2)$$

$$\sigma_2(m_1, r_1) \cdot 1 + \sigma_2(m_1, r_2) \cdot 3 = \sigma_2(m_2, r_1) \cdot 0 + \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 2$$

és

$$\sigma_2(m_1, r_1)u(t_2, m_1, r_1) + \sigma_2(m_1, r_2)u(t_2, m_1, r_2) = \sigma_2(m_2, r_1)u(t_2, m_2, r_1) + \sigma_2(m_2, r_2)u(t_2, m_2, r_2)$$

$$\sigma_2(m_1, r_1) \cdot 0 + \sigma_2(m_1, r_2) \cdot 2 = \sigma_2(m_2, r_1) \cdot 1 + \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 3.$$

Mivel $\sigma_2(m_1, r_1) = 1 - \sigma_2(m_1, r_2)$ és $\sigma_2(m_2, r_1) = 1 - \sigma_2(m_2, r_2)$, így:

$$1 - \sigma_2(m_1, r_2) + \sigma_2(m_1, r_2) \cdot 3 = \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 2$$

$$1 + \sigma_2(m_1, r_2) \cdot 2 = \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 2$$

és

$$\sigma_2(m_1, r_2) \cdot 2 = 1 - \sigma_2(m_2, r_2) + \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 3$$

$$\sigma_2(m_1, r_2) \cdot 2 = 1 + \sigma_2(m_2, r_2) \cdot 2,$$

ami lehetetlen.
Hasonló számolással kaphatjuk meg, hogy a $\sigma_1(t_1, m_1) = 0$, $\sigma_1(t_1, m_2) = 1$, $\sigma_1(t_2, m_i) > 0$ illetve a $\sigma_1(t_2, m_1) = 1$, $\sigma_1(t_2, m_2) = 0$, $\sigma_1(t_1, m_i) > 0$ alakú stratégiák sem lehetségesek.
Ha $\sigma_1(t_1, m_1) = 1$, $\sigma_1(t_1, m_2) = 0$, $\sigma_1(t_2, m_i) > 0$, azaz ha $P1$ erős, akkor mindenképpen sört iszik, ha gyenge, akkor a sörnek és a limonádénak is pozitív a valószínűsége. Ekkor, hasonlóan az előzőekhez:

$$\sigma_2(m_1, r_2) = \frac{1}{2} + \sigma_2(m_2, r_2)$$

$\mu(t_1; m_2) = 0$ és $\mu(t_1; m_2) = 1$, azaz ha $P1$ limonádét iszik, biztosan gyenge. Ezért $\sigma_2(m_2, r_1) = 1$ és $\sigma_2(m_2, r_2) = 0$, azaz $P2$ mindig beleköt a limonádé-ivókba.
Így $\sigma_2(m_1, r_2) = \frac{1}{2} = \sigma_2(m_1, r_1)$, tehát $P2$ a sörivókba $1/2$ valószínűséggel köt bele. Számolás nélkül is jól látható, hogy ekkor $P1$-nek a legjobb válasza $P2$ stratégiájára, ha soha nem iszik limonádét, mert a gyenge limonádé-ivónak is jobban megéri, ha elkerüli a konfliktust, mint ha az általa kedvelt italt issza. Viszont ez ellentmond annak a feltételnek, hogy a limonádé valószínűsége pozitív.
Hasonlóan meggondolható, hogy abban az esetben sem találunk Nash-egyensúlyt, amikor ha $P1$ gyenge, mindig limonádét iszik, ha erős, akkor a sörnek és a limonádénak is pozitív a valószínűsége.
Tehát maradt két eset. Az egyik esetben $P1$ mindig limonádét iszik, ha erős és mindig sört, ha gyenge, azaz $\sigma_1(t_1, m_1) = \sigma_1(t_2, m_2) = 0$ és $\sigma_1(t_1, m_2) = \sigma_1(t_2, m_1) = 1$, a másik esetben $P1$ mindig sört iszik, ha erős és limonádét, ha gyenge, azaz $\sigma_1(t_1, m_2) = \sigma_1(t_2, m_1) = 0$ és $\sigma_1(t_1, m_1) = \sigma_1(t_2, m_2) = 1$.
Az első esetben $\mu(t_1; m_1) = \mu(t_2; m_2) = 0$ és $\mu(t_1; m_2) = \mu(t_2; m_1) = 1$. Ezért $\sigma_2(m_1, r_2) = \sigma_2(m_2, r_1) = 0$ és $\sigma_2(m_1, r_1) = \sigma_2(m_2, r_2) = 1$. Tehát $P2$ mindig beleköt a sörivókba és a limonádé-ivókba soha. Viszont ekkor $P1$-nek érdemes limonádéivásra váltania.
Hasonlóan látható a második eset is, ekkor $P2$ mindig beleköt a limonádé-ivókba és a sörivókba soha, tehát $P1$-nek érdemes sörre váltani.
Ezzel beláttuk, hogy csak a fent említett két Nash-egyensúly van a játékban.

Még egy játékot fogunk vázlatosan elemezni, ez jellegében kicsit eltér a klasszikus jelzéses játékoktól.

Sir Philip Sidney játék

Ebben a játékban a korábbiakhoz képest van egy plusz paraméter is, ami a játékosok rokonsági fokát fogja jelezni. A történet szerint két testvérnek, Philipnek és Robertnek ugyanarra az erőforrásra (pl.:víz) lenne szüksége a túléléshez. Ezt kezdetben Philip birtokolja. Mindkettejüknek van esélye túlélni a víz nélkül, de aki megissza, biztosan életben marad. Robert jelezhet Philipnek, hogy nagy szüksége van a vízre, ekkor Philip dönthet úgy, hogy átadja vagy hogy ő maga issza meg a vizet. Viszont itt Philip azt is mérlegeli a döntésnél, hogy abból neki is előnye származhat, ha megmenti a rokonát (evolúciós előny).
A korábbi jelöléseket használva $P1$ a jelzést adó játékos, $P2$ aki az erőforrást birtokolja. A rokonsági fokot k-val jelöljük, ahol k egy konstans. Az erőforrás 1 egészséget biztosít annak, aki megszerzi. $P2$ egészsége $(1-d)$, ha átadja $P1$-nek az erőforrást (és 1, ha nem). $P1$ kétféle típusú lehet, m valószínűséggel szüksége van az erőforrásra, ekkor az egészsége $(1-a)$, vagy $(1-m)$ valószínűséggel nincs szüksége az erőforrásra, ekkor az egészsége $(1-b)$. Nevezzük „rossz” állapotnak, amikor szüksége van az erőforrásra, „jó” állapotnak, amikor nem. $P1$ küldhet jelzést $P2$-nek, hogy szüksége van az erőforrásra, de ennek egy c pluszköltsége van. $P2$ lehetséges cselekedetei, hogy átadja az erőforrást, vagy nem (bármelyiket cselekedheti, attól függetlenül, hogy látott-e jelzést, vagy nem). A játékosok haszna a saját egészségük és a másik játékos egészsége a k rokonsági fokkal szorozva.
Ebben a játékban az egyensúly fogalmát a hagyományos Nash-egyensúly értelemben fogjuk használni, azaz egyik játékos sem nyerhet többet, ha stratégiát vált. Jelzéses egyensúlynak nevezzük azt a Nash-egyensúlyt, ahol $P1$ jelzést küld, de itt ez a jelzés nem csak egyféle lehet (tehát c nem egy konstans költség) és $P2$ is többféleképpen cselekedhet attól függően, hogy milyen jelzést kapott. Lehetséges nem jelzéses egyensúly is, ahol nincs információ-csere a játékosok közt és esetleg mindkettőjüknek nagyobb a haszna, mint egy jelzéses egyensúlyban. Azokat a feltételeket keressük, ahol a jelzés ilyen értelemben túl drága lehet.
A játéknak definiálható folytonos változata is, de ezt nem elemezzük. Azt nézzük meg vázlatosan, hogy a diszkrét változatban vannak olyan feltételek, amelyek mellett az egyik vagy minkét játékos nagyobb haszonra tesz szert egy nem jelzéses egyensúlyban, mint egy jelzésesben. (Csak tiszta stratégiákat nézünk.)
Nézzük először $P1$ stratégiáit. Négyféle stratégia lehetséges: mindig jelez; soha nem jelez; csak akkor jelez, ha „rossz” állapotban van; csak akkor jelez, ha „jó” állapotban van. A negyedik stratégiát elhagyhatjuk, mert ez ekvivalens lesz a harmadik stratégiával olyan értelemben, hogy a jelzés csak arra szolgál, hogy megkülönböztesse a „jó” és „rossz” állapotokat és igazából mi most csak a jelzés költségével foglalkozunk. $P2$ lehetséges stratégiái: mindig átadja az erőforrást; soha nem adja át; csak akkor adja át, ha jelzést lát; csak akkor adja át, ha nem lát jelzést. Itt is elhagyhatjuk a negyedik stratégiát, mert az soha nem lesz optimális. A lehetséges stratégiapárokat egy táblázatban foglalhatjuk össze. (1. ábra)

Az egyetlen lehetséges jelzéses egyensúly a $P1$ csak akkor jelez, ha „rossz” állapotban van-$P2$ csak akkor adja át az erőforrást, ha jelzést lát stratégiapár (E). Ha

		P1		
		soha nem jelez	csak ha rossz állapotban van	mindig jelez
P2	soha nem adja át az erőforrást	A	B	C
	csak ha jelzést lát	D	E	F
	mindig átadja	G	H	I

1. ábra.

ez egyensúly, akkor a nem jelzéses egyensúlyok a $P1$ soha nem jelez-$P2$ soha nem adja át az erőforrást (A) illetve a $P1$ soha nem jelez-$P2$ mindig átadja az erőforrást (G) stratégiapárok lehetnek, de ezek közül csak az egyik lesz tényleg egyensúly. Ahhoz, hogy E egyensúly legyen, az kell, hogy $P1$-nek ne érje meg D-re vagy F-re váltani és $P2$-nek ne érje meg B-re vagy H-ra váltani.
$P1$ haszna E-nél:

$$m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-b)+k)$$

$P1$ haszna D-nél:

$$m((1-a)+k)+(1-m)((1-b)+k)$$

$P1$ haszna F-nél:

$$m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-c)+k(1-d))$$

Az

$$m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-b)+k) \geq m((1-a)+k)+(1-m)((1-b)+k)$$

és

$$m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-b)+k) \geq m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-c)+k(1-d))$$

egyenlőtlenségeket megoldva kapjuk, hogy

$$a \geq c+kd \geq b.$$

$P2$ stratégiáit vizsgálva hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$a \geq (d/k) \geq b.$$

A vagy G nem jelzéses egyensúly lesz. Könnyen meggondolható, hogy $P1$-nek sem A sem G esetben nem éri meg stratégiát váltani, ugyanis ekkor csökkenne a haszna, mert ha bármikor jelez, annak a c költségét ki kell fizetnie. $P2$ hasznát nézve kiszámolható, hogy G-ben lesz egyensúly, ha

$$d < k(ma + (1-m)b),$$

és A-ban egyébként.

Ha $P1$ jelezni akar, az a legjobb neki, ha ennek a jelzésnek a lehető legkisebb a költsége. *Legolcsóbb hihető jelzés*nek nevezzük azt a $\hat{c}$ költségű jelzést, ami a legolcsóbb azok közül, amik túl drágák ahhoz, hogy „jó" állapotban levő ember küldje el. $\hat{c} = b - kd$ a $c + kd \geq b$ egyenlőtlenség miatt.

Most már összehasonlíthatjuk $P1$ és $P2$ hasznát a jelzéses és nem jelzéses egyensúlyokban. Külön kell kezelni az A és G eseteket. Nézzük először A összehasonlítását E-vel, azaz a $P1$ soha nem jelez-$P2$ soha nem adja át az erőforrást stratégiapár összehasonlítását a jelzéses egyensúllyal. Kiszámolható, hogy $P1$ haszna nagyobb A-ban, ha $c > a - dk$ és $P2$ haszna nagyobb A-ban, ha $c > a - (d/k)$. c helyére $\hat{c} = b - kd$-t helyettesítve, az egyenlőtlenségeket rendezve kapjuk, hogy $b < a < (d/k) - dk + b$ esetén $P1$ jobban jár a jelzéses egyensúllyal, $P2$ pedig a nem jelzésessel.

Nézzük most G összehasonlítását E-vel, azaz a $P1$ soha nem jelez-$P2$ mindig átadja az erőforrást stratégiapár összehasonlítását a jelzéses egyensúllyal. Ekkor $P1$ haszna nagyobb G-ben, ha $mc > (1-m)(dk - b)$ és $P2$ haszna nagyobb G-ben, ha $mc > (1-m)(d/k - b)$. Ismét c helyére $\hat{c} = b - kd$-t helyettesítve kapjuk, hogy $P1$ jobban jár a nem jelzéses egyensúllyal, ha $b/d > k$ és $P2$ jobban jár a nem jelzéses egyensúllyal, ha $b > (1-m)d/k + mkd$. Ezeket összevetve $d < k(ma + (1-m)b)$ feltétellel, kapjuk k-ra:

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4d^2m(1-m)}}{2dm} < k < \frac{b + \sqrt{b^2 - 4d^2m(1-m)}}{2dm}.$$

Tehát ilyen k-ra mindkét játékos jobban jár a nem jelzéses egyensúllyal. Lehet példát hozni olyan paraméterekre, amik tényleg kielégítik ezeket a feltételeket, ez megtalálható [1]-ben.

Irodalomjegyzék

[1] Carl T. Bergstrom and Michael Lachmann. Signalling among relatives. i. is costly signalling too costly? *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences*, 352(1353):609—617, May 1997.

[2] In-Koo Cho and David M. Kreps. Signaling Games and Stable Equilibria*. *The Quarterly Journal of Economics*, 102(2):179–221, 05 1987.

[3] David M. Kreps and Joel Sobel. Chapter 25 signalling. volume 2 of *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, pages 849–867. Elsevier, 1994.