Jelzéses játékok

Biskopics Boglárka

2023. június 2.

Bevezetés

Definíció (diszkrét, véges játékra)

- nem teljes információs játék, 2 játékos
- $P1$ típusa egy $t \in T$, T véges halmaz (t-t csak $P1$ ismeri)
- t-t egy ρ valószínűség-eloszlás szerint választja a természet T-ből, ρ-t mindkét játékos ismeri
- $P1$ egy $m \in M$ jelzést küld $P2$-nek (M véges)
- $P2$ m alapján választ egy $r \in R$ cselekedetet (R véges)
- $P1$ haszna $u(t, m, r)$, $P2$ haszna $v(t, m, r)$

Példa

- $P1$ egy használt autót szeretne eladni $P2$-nek
- $T = \{$jó, rossz$\}$ az autó állapota
- $P1$ adhat garanciát, ez az m jelzés
- $R = \{$megveszi, nem veszi meg$\}$ $P2$ cselekedete

Sör-limonádé játék

Sör-limonádé játék

- $T = \{t_1 = \text{erős}, t_2 = \text{gyenge}\}$ $P1$ lehetséges típusai
- $\rho(t_1) = 0,9$ és $\rho(t_2) = 0,1$
- $M = \{m_1 = \text{sör}, m_2 = \text{limonádé}\}$
- Ha $P1$ erős, jobban szereti a sört, ha gyenge akkor a limonádét. 1 a haszna, ha az általa kedvelt italt választja, 0 egyébként.
- $R = \{r_1 = \text{beleköt}, r_2 = \text{nem köt bele}\}$ $P2$ lehetséges cselekedetei
- $P2$ haszna 1, ha $P1$ gyenge és beleköt, vagy ha $P1$ erős és nem köt bele, egyébként 0
- $P1$ haszna 2, ha nem kötnek bele, 0 egyébként

$P1$ viselkedési stratégiái: $\sigma_1(t, m)$, ahol $\sigma_1(t, \cdot)$ minden t-re egy valószínűség-eloszlás M-en. Tehát t $\sigma_1(t, m)$ valószínűséggel küldi m jelzést.

$P2$ viselkedési stratégiái: $\sigma_2(m, r)$, ahol $\sigma_2(m, \cdot)$ minden m-re egy valószínűség-eloszlás R-en.Tehát $P2$, ha m jelzést látja $\sigma_2(m, r)$ valószínűséggel választja r cselekedetet.

σ_1 és σ_2 viselkedési stratégiák akkor és csak akkor vannak Nash-egyensúlyban, ha
$\sigma_1(t, m) > 0$ esetén

$$\sum_r \sigma_2(m, r)u(t, m, r) = \max_{m' \in M}(\sum_r \sigma_2(m', r)u(t, m', r))$$

és minden m-re, amire $\sum_t \sigma_1(t, m)\rho(t) > 0$, $\sigma_2(m, r) > 0$ esetén

$$\sum_t \mu(t; m)v(t, m, r) = \max_{r'} \sum_t \mu(t; m)v(t, m, r')$$

ahol

$$\mu(t; m) := \frac{\sigma_1(t, m)\rho(t)}{\sum_{t'} \sigma_1(t', m)\rho(t')}$$

, ha $\sum_t \sigma_1(t, m)\rho(t) > 0$.

Két Nash-egyensúly van, az egyikben $P1$ mindig sört iszik, függetlenül a típusától, a másikban pedig mindig limonádét. Az elsőt nézzük meg, a második hasonlóan látható.

- $\sigma_1(t_i, m_1) = 1$, $i = 1, 2$
- $\sigma_1(t_i, m_2) = 0$, $i = 1, 2$

Ebből $\mu(t_1; m_1) = 0,9$ és $\mu(t_2; m_1) = 0,1$.
$P2$ várható haszna a sörre nézve:

$$\mu(t_1; m_1)v(t_1, m_1, r_1) + \mu(t_2; m_1)v(t_2, m_1, r_1) = 0,1$$

$$\mu(t_1; m_1)v(t_1, m_1, r_2) + \mu(t_2; m_1)v(t_2, m_1, r_2) = 0,9$$

Azaz $P2$ soha nem köt bele sörivóba.

- $\sigma_2(m_1, r_1) = 0$
- $\sigma_2(m_1, r_2) = 1$

Ahhoz, hogy ez Nash-egyensúly legyen, az kell, hogy $P1$-nek ne érje meg soha sör helyett limonádét inni. Ha $P1$ erős, akkor jobban jár, ha mindig sört iszik.
Ha $P1$ gyenge, akkor a

$$\sigma_2(m_2, r_1)u(t_2, m_2, r_1) + \sigma_2(m_2, r_2)u(t_2, m_2, r_2) <$$

$$< \sigma_2(m_1, r_1)u(t_2, m_1, r_1) + \sigma_2(m_1, r_2)u(t_2, m_1, r_2)$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.
Ebből azt kapjuk, hogy $\sigma_2(m_2, r_1) > 1/2$, azaz ha $P2$ több, mint $1/2$ valószínűséggel beleköt a limonádé-ivókba, akkor ez tényleg Nash-egyensúly lesz.

Sir Philip Sidney játék

- k konstans, rokonsági fok
- $P2$ birtokol egy erőforrást, 1 egészséget ad
- $P1$ jelezhet, $P2$ átadhatja az erőforrást
- jelzés költsége c (változhat)

Kezdetben:

- $P1$ m valószínűséggel „rossz” állapotban van, egészsége $(1 - a)$
- $P1$ $(1 - m)$ valószínűséggel „jó” állapotban van, egészsége $(1 - b)$
- $P2$ egészsége $(1 - d)$

A játékosok haszna a saját egészségük és a másik játékos egészsége a k rokonsági fokkal szorozva.
Azokat a feltételeket keressük, ahol a jelzés „túl drága”.

- csak tiszta stratégiák

		P1		
		soha nem jelez	csak ha rossz állapotban van	mindig jelez
P2	soha nem adja át az erőforrást	A	B	C
	csak ha jelzést lát	D	E	F
	mindig átadja	G	H	I

Lehetséges egyensúlyok:

- E (jelzéses)
- A vagy G (nem jelzéses)

E egyensúly, ha $P1$-nek nem éri meg D-re vagy F-re váltani:

$$m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-b)+k) \geq m((1-a)+k)+(1-m)((1-b)+k$$

és

$$m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-b)+k) \geq$$
$$\geq m((1-c)+k(1-d))+(1-m)((1-c)+k(1-d)),$$

és ha $P2$-nek nem éri meg B-re vagy H-ra váltani. Ez hasonlóan felírható.

Feltételek

$$a \geq c + kd \geq b.$$

$$a \geq (d/k) \geq b.$$

A vagy G nem jelzéses egyensúly.

- $P1$-nek soha nem éri meg stratégiát váltani (c-t ki kell fizetni)
- $P2$ várható hasznát kiszámolva G-ben lesz egyensúly, ha

$$d < k(ma + (1 - m)b)$$

  és A-ban egyébként.

Legolcsóbb hihető jelzés

$\hat{c} = b - kd$

A és E összehasonlítása:

- $P1$ haszna nagyobb A-ban, ha $c > a - dk$
- $P2$ haszna nagyobb A-ban, ha $c > a - (d/k)$

c helyére $\hat{c} = b - kd$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$b < a < (d/k) - dk + b$$

esetén $P1$ jobban jár a jelzéses egyensúllyal, $P2$ pedig a nem jelzésessel.
G és E összehasonlítása:

- $P1$ haszna nagyobb G-ben, ha $mc > (1 - m)(dk - b)$
- $P2$ haszna nagyobb G-ben, ha $mc > (1 - m)(d/k - b)$

$\hat{c} = b - kd$-t helyettesítve kapjuk, hogy $P1$ jobban jár a nem jelzéses egyensúllyal, ha $b/d > k$ és $P2$ jobban jár a nem jelzéses egyensúllyal, ha $b > (1 - m)d/k + mkd$.

Ezeket összevetve $d < k(ma + (1-m)b)$ feltétellel, kapjuk k-ra:

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4d^2m(1-m)}}{2dm} < k < \frac{b + \sqrt{b^2 - 4d^2m(1-m)}}{2dm}.$$

Tehát ilyen k-ra mindkét játékos jobban jár a nem jelzéses egyensúllyal.

Köszönöm a figyelmet!