Optimális kereskedési stratégiák

Hoffmann Balázs

May 2023

Bevezetés

Az egyéni kutatómunkám során az ATP-t (Arbitrage Pricing Theory) övező problémakörrel foglalkoztam, azon belül is a végtelen termékes piacokkal. Az alapprobláma a piacon optimális befektetési stratégiát találni ∞ sok termék esetén. Először is definiáljuk random változók sorozatát:

Definíciók

Definíció 1 *Termékhozam. Először is definiáljuk random változók sorozatát:* $R_0 := r$, $R_i := \mu_i + \hat{\beta}_i \delta_i$, *ha* $1 \leq i \leq m$ *és* $R_i := \mu_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j \delta_j \hat{\beta}_i \epsilon_i$, *ha* $i > m$. R_i *az i-edik termék hozama. A kockázatmentes hozamot az* r *konstans jelöli,* δ_j *és* ϵ_i *négyzetesen integrálható valószínűséhi változók,* $E\delta_j = 0$, $E\delta_j^2 = 1$, *ha* $1 \leq i \leq m$ *és* $E\epsilon_j = 0$, $E\epsilon_j^2 = 1$, *ha* $i > m$, *valamit* $i \neq j$ *esetén* $E\epsilon_i\epsilon_j = 0$.

Tehát a μ_i *konstans egyenlő* ER_i*-vel,* β_i^j *és* $\hat{\beta}_i$ *valósak, továbbá feltesszük, hogy* $\hat{\beta}_i \neq 0$.

Azt a piacmodellt, amely csak $R_0, ..., R_k$-t tartalmazza, k-adik piaci szegmensnek nevezzük.

Definíció 2 *Portfólió. A* ϕ_k *portfólió a k-adik piaci szegmensben valós számok egy tetszőleges sorozata* ϕ_k^i, $0 \leq i \leq k$, *amelyre* $\sum_{i=0}^{k} \phi_k^i = 0$ *teljesül. Stratégiának nevezünk egy portfóliósorozatot.*

Definíció 3 *Portfólió hozama. Az k-adik portfólió hozama:*

$$V(\phi_k) = \sum_{i=0}^{k} \phi_k^i R_i.$$

Definíció 4 *Arbitrázs. A piacon van arbitrázs, ha a k-adik piaci szegmensben létezik portfóliók* ϕ_k *sorozata, melyre* $k \to \infty$ *esetén*

$$EV(\phi_k) \to \infty, Var(V(\phi_k)) \to 0.$$

Ha nincs ilyen sorozat, akkor a piacon nincs arbitrázs (AAA).

Definíció 5 *Ekvivalens martingálmérték. $Q \sim P$ ekvivalens kockázatmentes mérték, vagy ekvivalens martingálmérték a teljes piacon, ha minden $i \geq 1$-re*

$$E^Q R_i = r.$$

Ha létezik ilyen Q mérték, akkor EMM teljesül, ha Q-ra $\frac{dQ}{dP} \in L^2$, akkor EMM2 teljesül.

Ha emellett minden $P' \sim P$-re létezik $Q \sim P$, hogy $\frac{dQ}{dP'} \in L^\infty$ akkor létezik erős értelemben vett ekvivalens martingálmérték, azaz EMMSS teljesül.

Kapcsolat az ekvivalens martingálmérték és az arbitrázs között.

Vezessünk be két új paramétert:

$$d_i := -\frac{\mu_i - r}{\hat{\beta}_i}, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$b_i := -\frac{\mu_i - r}{\hat{\beta}_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{(\mu_i - r)\beta_i^j}{\hat{\beta}_i \hat{\beta}_j}, \quad i > m.$$

Tétel 1 *Tegyük fel, hogy a δ_i-k korrelálatlanok egymással, az ϵ_i-k egymástól függetlenek, valamint a δ_i-ktől is $(1 \leq i \leq m)$. Ekkor, ha*

$$sup_{i>m} E|\epsilon_i|^3 < \infty,$$

akkor

$$AAA \Longleftrightarrow \sum_{i=m+1}^{\infty} b_i^2 < \infty \Longleftrightarrow EMM2.$$

A nagy piaci modell

Térjünk át a nagy piacokra. Legyen (Ω, F, P) valószínűségi mező. Az i-edik termék hozama:

$$R_i := \hat{\beta}_i(\epsilon_i - b_i), \quad 1 \leq i \leq m$$

$$R_i := \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j(\epsilon_i - b_i) + \hat{\beta}_i(\epsilon_i - b_i), \quad i > m.$$

Haszonmaximalizálás

Jelölje az x-ből induló ϕ stratégiát követő kereskedés értékét az 1 időpillanatban $V^{x,\phi} = x + \langle\, \phi,\, \epsilon - b \rangle$.

Definíció 6 *Haszonfüggvény.* $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konkáv szigorúan növekvő difeerenciálható függvény, és valamely* $x_0 \in \mathbb{R}$*-re*

$$U(x_0) = 0, \quad U'(x_0) = 1.$$

Legyen $G \in L^0$ valószínűségi változó, amely egy értékpapír kifizetését jelöli T időpontban $x \in \mathbb{R}$. Ekkor definiálhatjuk a következő halmazt:

$$A(U, G, x) := \{\phi \in l_2, EU^-(V^{x,\phi} - G) < +\infty\}.$$

Ekkor definiálhatjuk a várható hasznát egy G értékpapírnak T időpontban, $x \in \mathbb{R}$ alaptőkéből indulva:

$$u(G, x) = sup_{\phi \in A(U,G,x)} EU(V^{x,\phi} - G).$$

Definíció 7 *A* ϕ *stratégia megengedhető, ha* $V(\phi) \geq -1$. *A megengedhető stratégiák halmaza* A.

Definíció 8 *(NUBPR) igaz, ha* $\{V(\phi), \phi \in A\}$ *korlátos valószínűségben, azaz*

$$sup_{\phi \in A} P(V(\phi) > n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

A témakör egyik legfontosabb tételének kimondása előtt tekintsünk néhány feltételt:
$||b||_{l_2} < \infty$,
minden $i \leq 1$-re $P(\epsilon_i > b_i) > 0$ és $P(\epsilon_i < b_i) > 0$,
$sup_{i>m} E|\epsilon_i|^3 < \infty$,
valamint $G \geq 0$ és $|E(U(x - G))| < \infty$.

Tétel 2 *A fenti feltételek mellett létezik optimális kereskedési stratégia. Létezik* $\phi^* \in A(U, G, x)$, *amire*

$$u(G, x) = EU(V^{x,\phi^*} - G).$$

Az eddig bevezetett jelölések mellet az optimális strtégia:

$$EU(x + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i R_i) \to max_\phi = \phi^*.$$

Stacionárius Piacok

Definíció 9 *A k-adik piaci szegmensben az i-edik értékpapír értéke legyen*

$$S_k^i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Definíció 10 *Stacionárius piac. Egy piacot stacionáriusnak nevezünk, amennyiben*

$$S_{k+1}^i = S_k^i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Jelölje F azon valószínűségi változók halmazát, melyeknek értéke

$$\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Definíció 11 *Egy piacon (NAFL) teljesül, ha nem létezik stratégiáknak olyan* $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozata, amire* $V^{\phi_k} \to V$ *valószínűségben, amint* $k \to \infty$, $V \in F \setminus \{0\}$.

Tétel 3 *Stacionárius piacokon*

$$NAFL \Longleftrightarrow EMMSS.$$

Irodalomjegyzék

Rásonyi, Miklós. "Equivalent martingale measures for large financial markets in discrete time." Mathematical Methods of Operations Research 58 (2003): 401-415.

Rásonyi, Miklós. "Arbitrage pricing theory and risk-neutral measures." Decisions in Economics and Finance 27 (2004): 109-123.

Carassus, Laurence, and Miklos Rasonyi. "From small markets to big markets." arXiv preprint arXiv:1907.05593 (2019).

Carassus, Laurence, and Miklós Rásonyi. "Risk-neutral pricing for arbitrage pricing theory." Journal of Optimization Theory and Applications 186 (2020): 248-263.

Rásonyi, Miklós. "Maximizing expected utility in the arbitrage pricing model." Journal of Mathematical Analysis and Applications 454.1 (2017): 127-143.