p-ADIKUS HODGE-ELMÉLET

PIGLER DONÁT
TÉMAVEZETŐ: ZÁBRÁDI GERGELY

Bevezetés

Egy $\Gamma = \varprojlim_i \Gamma_i$ provéges csoportra[1] tekinthetünk úgy, mint topologikus csoportra: Γ_i-ken a diszkrét topológiát véve Γ-t természetes módon a $\prod_i \Gamma_i$ szorzattér altértopológiájával látjuk el. Így egy kompakt, Hausdorff és totálisan összefüggéstelen topológikus teret kapunk.

1. Definíció. *Γ provéges csoport folytonos reprezentációja egy Λ végesen generált $\mathbb{Z}_p$-moduluson egy olyan $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-modulus struktúra, ahol a $\Gamma \times \Lambda \to \Lambda$ hatás folytonos (Λ topologikus $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-modulus). Γ ilyen folytonos reprezentációinak kategóriáját $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma)$ jelöli.*

1. Megjegyzés. *A definícióval ekvivalens, ha azt követeljük meg, hogy a $\Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda)$ leképezés folytonos. Például, ha Λ $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-modulus végesen generált szabad $\mathbb{Z}_p$-modulus, akkor Λ egy $\mathbb{Z}_p$-bázisát kiválasztva $\Lambda \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma) \iff \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\Lambda)$ folytonos ($n = dim_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$). (Valójában az is ekvivalens, ha azt követeljük meg, hogy Γ-nak a $\Lambda/p^n\Lambda$ véges halmazon a hatásának magja nyílt minden $n \geq 1$-re.)*

2. Definíció. *Egy Γ provéges csoport p-adikus reprezentációjának nevezünk egy V véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$-vektorteret, amelyen Γ folytonosan és lineárisan hat. Γ p-adikus reprezentációinak kategóriája $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma)$.*

1. Példa. *Ha $\Lambda \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma)$, akkor Λ skaláris kiterjesztése $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma)$.*

Sőt igaz az alábbi

1. Állítás. *Bármely $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma)$-hoz létezk egy Λ véges szabad $\mathbb{Z}_p$-részmodulusa V-nek, amelyre $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \simeq V$ (vagyis Λ egy olyan $\mathbb{Z}_p$-rács V-ben, amelyet Γ fixen hagy).*

Bizonyítás. Legyen $\phi : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ a folytonos hatás és válasszunk egy tetszőleges $\Lambda_0 \subseteq V$ $\mathbb{Z}_p$-rácsot. Ekkor $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda_0)$ nyílt részcsoport $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$-ban, ugyanis $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda_0$. Ezért $\Gamma_0 = \phi^{-1}(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda_0))$ nyílt részcsoport Γ-ban, vagyis véges indexű, hiszen Γ kompakt. Válasszunk $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ reprezentánsokat Γ_0 mellékosztályaihoz ($n = |\Gamma/\Gamma_0|$), ekkor $\Lambda = \sum_i \phi(\gamma_i)\Lambda_0$ ugyancsak egy $\mathbb{Z}_p$-rács lesz V-ben, ráadásul Γ fixen hagyja, hiszen Γ_0 fixen hagyja Λ_0-t és $\Gamma = \bigsqcup \gamma_i\Gamma_0$. $\square$

[1] Provéges csoportnak hívunk (Γ_i, Φ_{ij}) véges csoportok inverz rendszerének inverz limeszét.

Most arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen topólógiával lehet ellátni egy $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ csoportot, ahol $F/\mathbb{Q}_p$ véges. No de nem véletlen, hogy a provéges csoportokról volt eddig szó, amit a következő Galois-elméletből közismert állítás is alátámaszt:

2. Állítás. *L/K Galois, $\mathcal{K} = \{K \leq K_\alpha \leq L \mid K'/K\,$véges, Galois$\}$ tartalmazás szerint rendezve. Legyenek a leképezések $\mathrm{Gal}(K_\alpha/K) \to \mathrm{Gal}(K_\beta/K)$ minden $K_\alpha, K_\beta \in \mathcal{K}$-ra és $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(K_\alpha/K)$ a megszorítás. Ekkor*

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \varprojlim_{K_\alpha \in \mathcal{K}} \mathrm{Gal}(K_\alpha/K)$$

Innen természetesen adódik egy Galois-csoporton a topológia: az, amelyben a $\mathrm{Gal}(L/K_\alpha)$ halmazok nyílt környezetbázisát adják 1-nek. Ezt szokás Krull-topológiának is hívni. Továbbá általánosan is igaz a

1. Tétel. *(Galois-elmélet főtétele). F/K Galois bővítés, $G = \mathrm{Gal}(F/K)$, ekkor*

$$\{K \leq L \leq F \text{ közbülsőtestek}\} \leftrightarrow \{H \leq G \text{ zárt részcsoportok}\}$$
$$\psi : L \mapsto \mathrm{Gal}(F/L)$$
$$F^H \leftarrow\!\shortmid H : \varphi$$

leképezések egymás inverzei. Továbbá, ha L/K normális (hasonlóan, ha $H \trianglelefteq G$ zárt), akkor a megszorítás topológikus izomorfizmust indukál $G/\mathrm{Gal}(F/L) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$ (hasonlóan $G/H \simeq \mathrm{Gal}(F^H/K)$).

A p-adikus Hodge-elméletben $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ provéges csoport p-adikus reprezentációit vizsgáljuk, ahol F $\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítése. Sokszor azonban jóval kényelmesebb áttérni arra az esetre, amikor a maradéktest algebrailag zárt. Ez a bizonyításokban úgy oldható meg, hogy F-et lecseréljük az $\overline{F}$-beli maximális elágazásmentes bővítésének telítettjére (és $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-et az inerciarészcsoportra). Vagyis kényelmesebb feltennünk, hogy a maradéktest véges vagy algebrailag zárt, azaz ha tökéletes maradéktestet írunk elő, akkor kellően általános lesz a tárgyalásmódunk.
Ezek után a beszámolóban K-n végig egy **p-adikus testet** értünk, vagyis $\mathrm{char}\, K = 0$ és K teljes egy rögzített diszkrét értékelésre nézvést, továbbá $k = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ maradékteste tökéletes és $\mathrm{char}\, k = p > 0$.[2]

2. Példa. *$\mathbb{Q}_p$ egy véges K bővítése, illetve K maximális elágazásmentes $\overline{K}$-beli bővítésének (azaz az inerciacsoport fixtestének) telítettje, ez utóbbit $\widehat{K^{un}}$-val jelöljük.*[3] *Nem p-adikus azonban $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (hiszen nem teljes) és $\mathbb{C}_p$ sem (hiszen az értékelésgyűrűje nem diszkrét).*

Legyen $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, mivel G_K p-adikus reprezentációinak legtöbb "jó" tulajdonságát le lehet olvasni az I_K inerciarészcsoportról, ezért egy gyakori trükk K-t lecserélni $\widehat{K^{un}}$-ra (sok esetben ezáltal a fontos információkat megőrizzük G_K-ról), ez

[2]Itt $\mathcal{O}_K$ K értékelésgyűrűje, $\mathcal{M}_K$ pedig $\mathcal{O}_K$ egyetlen maximális ideálja.
[3]Általában egy K test telítettjét $\widehat{K}$-val jelöljük.

a maradéktesteket tekintve az algebrai lezártra való áttérést jelenti (belátható, hogy ekkor $I_K := G_{K^{un}} = G_{\widehat{K^{un}}}$, fontos azonban, hogy K^{un} nem teljes (!), amikor $k \neq \overline{k}$). A p-adikus Hodge-elmélet célja, hogy átfogó leírását adja G_K néhány "szép" p-adikus reprezentációjának, különösképpen a p-adikus testek feletti algebrai geometriából eredeztethető reprezentációknak.

$\mathbb{C}_K$-reprezentációk

Jelöljük K algebrai lezártjának telítettjét $\mathbb{C}_K$-val (vagyis $\mathbb{C}_K$ $\overline{K}$ p-adikus telítettje). Nota bene, $\mathbb{C}_K$ nem p-adikus test, hiszen a kiterjesztett értékelés nem diszkrét, ezzel együtt azonban G_K folytonos hatása egyértelműen kiterjed K-ról $\mathbb{C}_K$-ra a telítés univerzális tulajdonsága miatt. A hátralévő részre rögzítsünk egy v értékelést $\mathbb{C}_K$-n, amire $v(p) = 1$.

3. Állítás. *$\mathbb{C}_K$ algebrailag zárt test.*

Bizonyítás. Legyen $p \in \mathbb{C}_K[x]$ nem konstans polinom, azt akarjuk tehát megmutatni, hogy létezik gyöke $\mathbb{C}_K$-ban. Szükség esetén átskálázva x-et, feltehetjük, hogy normált $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}[x]$-beli:

$$p(x) = x^d + a_1 x^{d-1} + \ldots + a_d, \quad a_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}.$$

Ekkor választhatunk egy olyan $(p_n) \in \mathcal{O}_{\overline{K}}[x]$ normált polinomsorozatot, hogy

$$p_n(x) = x^d + a_{1,n} x^{d-1} + \ldots + a_{d,n}, \quad a_{i,j} \in \mathcal{O}_{\overline{K}} \text{ és } v(a_i - a_{i,n}) \geq dn,$$

vagyis a p_n tagjai tartanak p megfelelő tagjaihoz a p-adikus értékelés szerint. Tekintsük p_1 egy $\alpha_1 \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ gyökét, ekkor indukcióval belátható, hogy választhatjuk $p_n(\alpha_n) = 0$, $\alpha_n \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ gyököket úgy, hogy $v(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \geq n - 1$. Valóban, $v(a_{i,n} - a_{i,n-1}) = v((a_{i,n} - a_i) + (a_i - a_{i,n-1})) \geq \min\{(a_{i,n} - a_i), (a_i - a_{i,n-1})\} \geq d(n-1)$ és

$$p_n(\alpha_{n-1}) = p_n(\alpha_{n-1}) - p_{n-1}(\alpha_{n-1}) = \sum_{i=1}^{d} (a_{i,n} - a_{i,n-1}) \alpha_{n-1}^{d-i},$$

továbbá

$$p_n(\alpha_{n-1}) = \prod_{i=1}^{d} (\alpha_{n-1} - \beta_{n,i}), \text{ ahol } \beta_{n,i}\text{-k } p_n(x) \text{ gyökei}$$

miatt $v(p_n(\alpha_{n-1})) \geq d(n-1)$. Ráadásul $\beta_{n,i} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, hiszen $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ egészre zárt. Kihasználva tehát, hogy $v(p_n(\alpha_{n-1})) \geq d(n-1)$, $p_n(\alpha_{n-1})$ ez utóbbi felírásából azt kapjuk, hogy létezik $1 \leq i \leq n$, amelyre $v(\alpha_{n-1} - \beta_{n,i}) \geq n - 1$. Válasszunk egy ilyen $\beta_{n,i}$-t α_n-nek, amiből az indukciós lépést beláttuk.

Ekkor mivel (α_n) Cauchy-sorozat, konvergál egy $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ elemhez, ez valóban gyöke lesz p-nek, ugyanis

$$p(\alpha_n) = p(\alpha_n) - p_n(\alpha_n) = \sum_{i=1}^{d} (a_i - a_{i,n}) \alpha_n^{d-i}.$$

□

G_K p-adikus reprezentációit (főleg amelyek az étale-kohomológiából adódnak) nagyon nehéz önmagukban megérteni, de ahogy Brinon és Conrad megjegyzi, ezek a reprezentációk sokkal egyszerűbbé válnak, miután "durván" feltenzorozzuk őket $\mathbb{C}_K$-val:

$$V \rightsquigarrow \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, \quad V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K).$$

Ekkor G_K továbbra is folytonosan hat $\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-n a $g(c \otimes v) = g(c) \otimes g(v),\ c \in \mathbb{C}_K,\ g \in G_K, v \in V$ természetesen adódó szabály szerint, azonban csak $\mathbb{C}_K$-szemilineárisan (!). Érdemes tehát definiálni még egy reprezentáció-kategórát.

3. Definíció. *Egy véges dimenziós W $\mathbb{C}_K$-vektorteret G_K $\mathbb{C}_K$-reprezentációjának nevezzük ha G_K folytonosan és szemiliniárisan hat W-n (vagyis a $G_K \times W \to W$ leképezésre $g(cw) = g(c)g(w)$ minden $c \in \mathbb{C}_K, w \in W$-re). A G_K-hoz tartozó $\mathbb{C}_K$-reprezentációk kategóriáját ($\mathbb{C}_K$-lineáris és G_K-ekvivariáns morfizmusokkal) $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$-val jelöljük.*

2. Megjegyzés. *Ez tulajdonképpen a konjugálással ellátott komplex vektorterek p-adikus analogonja. Azaz, ha $w_1, w_2, \dots w_n$ egy $\mathbb{C}_K$-bázis W-ben, akkor $g(w_j)$ felírható egyértelműen $\sum_i a_{ij}(g) w_i$-ként minden j-re, ekkor $\mu : G_K \to M_n(\mathbb{C}_K)$, ahol $\mu(g) = (a_{ij}(g))$, egy folytonos leképezés, $\mu(1) = \mathrm{I_n}$ és $\mu(gh) = \mu(g) \cdot g(\mu(h))$ minden $g, h \in G_K$-ra.*[4] *Vagyis valójában $\mu : G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_K)$ (hiszen $\mu(g)$ inverze $g(\mu(g^{-1}))$), azonban a szemilinearitás miatt nem homomorfizmus.*

3. Példa. *A definíciót részben motiváló $W := \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (ahol $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ természetesen $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$-beli lesz.*

Látható, hogy $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$ Abel-kategória a tenzorszorzás, direktösszeg és egzakt sorozatok értelemszerűen adódó fogalmaival, sőt, ha még a szemilinearitást sem tévesztjük szemünk elől, a duális tér is értelmezhető: ha $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$, akkor $W^\vee$ legyen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_K}(W, \mathbb{C}_K)$, ahol G_K a $(g\ell)(w) = g(\ell(g^{-1}(w)))$ szerint hat, ahol $w \in W, \ell \in W^\vee, g \in G_K$. Ez a hatás valóban folytonos lesz.

Tate-csavarás

Tegyük fel, hogy F egy nem p karakterisztikájú test, amelynek rögzítjük egy F^s szeparábilis lezártját, legyen továbbá $\boldsymbol{\mu}_{p^n} = \boldsymbol{\mu}_{p^n}(F)$ $(F^s)^\times$ p^n-edik egységgyökeinek csoportja (ha $\mathrm{char}\, F = p$, ez triviális) és $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} = \cup_n \boldsymbol{\mu}_{p^n}$. G_F hatását $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$-en a $g(\zeta) = \zeta^{\chi(g)}$ összefüggés írja le egy egyértelmű $\chi(g) \in \mathbb{Z}_p^\times$-vel, ahol ha ζ p^n-edik egységgyök, akkor a kitevő $\chi(g)$ csak p^n-től függ és $\chi(g) \mod p^n \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ leírja g hatását a p^n-edik egységgyökökön. Azaz $\chi \mod p^n$-nek nyílt magja van (amely az $F(\boldsymbol{\mu}_{p^n})/F$ véges bővítésnek felel meg), következésképp χ folytonos.

4. Definíció. *A fenti $\chi : \mathrm{Gal}(F(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/F) \to \mathbb{Z}_p^\times$ folytonos karaktert p-adikus körosztási karakternek nevezzük. (A kontextusból legtöbbször egyértelmű, hogy milyen p prím szerinti, ezért ezt külön nem jelöljük.)*

[4] Vegyük észre ez utóbbi összefüggésnél, hogy μ eszerint 1-kolánc – erre majd később visszatérünk.

3. Megjegyzés. $\mathrm{Im}(\chi)$ *zárt részcsoportja* $\mathbb{Z}_p^\times$*-nak. Speciálisan, ha* $F = \mathbb{Q}_p$ *vagy* $\mathbb{Q}$*, akkor* χ *szürjektív.*

Térjünk vissza az eredeti felállásunkhoz, ekkor $\varprojlim \boldsymbol{\mu}_{p^n}(\overline{K})$ – amelyet szokás *p-adikus Tate-modulusnak* is hívni – egy topologikus G_K-modulus, amely egy szabad 1 rangú $\mathbb{Z}_p$-modulus (nem kanonikus az izomorfizmus, hiszen egy $(\zeta_{p^n})_n$ primitív p hatvány egységgyökökből álló kompatibilis $[\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}]$ sorozat választásától függ), ezért a továbbiakban $\mathbb{Z}_p(1)$-gyel jelöljük. G_K természetesen hat a körosztási karakteren keresztül: ha $a \in \mathbb{Z}_p$, akkor $ga = \chi(g)a$ ($\mathbb{Z}_p(1)$ egy bázisának rögzítésével).

4. Állítás. *A* $\chi(I_K)$ *csoport végtelen.*

Bizonyítás. Definíció szerint χ határozza meg G_K hatását $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\overline{K})$-n, vagyis $\mathrm{Ker}(\chi) = \mathrm{Gal}(K(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\overline{K}))/K)$, azaz elegendő megmutatni csupán, hogy $K(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\overline{K}))$ teljesen elágazó bővítése K-nak.
Legyen $e_n = |v(K(\boldsymbol{\mu}_{p^n}(\overline{K}))^\times) : V(K^\times)|$ és $e = v(p)$ pedig K abszolút elágazási indexe $\mathbb{Q}_p$ felett. Ekkor $e_n e$ legalább akkora, mint $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n}(\overline{K}))$ abszolút elágazási indexe $\mathbb{Q}_p$ felett, amely épp $\varphi(p) = p^{n-1}(p-1)$, vagyis $e_n e \geq p^{n-1}(p-1) \to \infty$, ahogy $n \to \infty$, ezzel pedig beláttuk az állítást. □

A későbbiekben szükségünk lesz a következő jelölésekre: $r \geq 0$ esetén $\mathbb{Z}_p(r) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes r}$ és $\mathbb{Z}_p(-r) = \mathbb{Z}_p(r)^\vee (= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p(r), \mathbb{Z}_p)$ a természetesen adódó G_K-hatással (a tenzorszorzás és dualitás funktorialitásából). Általánosan, $r \in \mathbb{Z}$ esetén, ha M egy $\mathbb{Z}_p[G_K]$-modulus, akkor $M(r) := \mathbb{Z}_p(r) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$ a természetesen adódó G_K hatással, vagyis ha rögzítünk egy bázist $\mathbb{Z}_p(1)$-ben, akkor $g.m = \chi(g)^r g(m)$ minden $g \in G_K$ és $m \in M$-re. Ezt az *r-edik Tate-csavarásnak* nevezzük. A definíciókból egyenesen adódik a következő

5. Állítás. *Legyen* M *egy* $\mathbb{Z}_p[G_K]$*-modulus, ekkor bármely* $r, s \in \mathbb{Z}$*-re*

$$M(r) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(s) \cong M(r+s) \quad \textit{és} \quad M(r)^\vee \cong M^\vee(-r)$$

kanonikus G_K*-ekvivariáns izomorfizmusok teljesülnek.*

6. Állítás. M *egy* $\mathbb{Z}_p[G_K]$*-modulus, amelyen* G_K *a* $\rho : G_K \to Aut(M)$ *homomorfizmus által hat, ekkor* $\forall r \in \mathbb{Z}$*-re* G_K *épp* $\chi^n \cdot \rho$*-n keresztül hat* $M(r)$*-en.*

Bizonyítás. $\mathbb{Z}_p(r)$ egy e báziselemét kiválasztva az $m \otimes e \mapsto m$ egy izomorfizmust határoz meg $M(r) \cong M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(r)$ és M között, vegyük észre, hogy a G_K-hatást $M(r)$-en épp $\rho \otimes \chi^r$ határozza meg. □

Általánosan, egy tetszőleges $\eta : G_K \to \mathbb{Q}_p^\times$ folytonos karakterre is megadható a definíció:

5. Definíció. *Legyen* $\eta : G_K \to \mathbb{Q}_p^\times$ *folytonos karakter,* M *pedig egy* $\mathbb{Q}_p[G_K]$*-modulus, ekkor* M η *szerinti csavarásának mondjuk a*

$$M(\eta) := M \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\eta)$$

$\mathbb{Q}_p[G_K]$-modulust, ahol $\mathbb{Q}_p(\eta)$ jelöli az η által meghatározott G_K-reprezentációt $\mathbb{Q}_p$-n.

4. Megjegyzés. *Az előző állítás következményeképp, ha M egy $\mathbb{Q}_p[G_K]$-modulus, akkor $M(r) \cong M(\chi^r)$.*

Tate-Sen-tétel

Legyen G egy topologikus csoport, M pedig egy nem feltétlenül Abel topologikus csoport, amelyen G folytonos hat $g(mn) = g(m)g(n)$ szerint $(g \in G,\ m, n \in M)$. Ekkor

$$H^0_{\text{cont}} := M^G = \{m \in M \mid g(m) = m, \forall g \in G\},$$

továbbá

$$Z^1_{\text{cont}}(G, M) = \{f : G \to M \text{ folytonos} \mid f(gh) = f(g) \cdot gf(h),\ \forall g, h \in G\}.$$

Ha $f, f' \in Z^1_{\text{cont}}(G, M)$, akkor azt mondjuk f és f' kohomológ, ha létezik $m \in M$, hogy $f'(g) = m^{-1}f(g)g(m)$, minden $g \in G$-re. Ez egy ekvivalenciarelációt ad meg $Z^1_{\text{cont}}(G, M)$-en, a faktort $H^1_{\text{cont}}(G, M)$-mel jelöljük. Például f pontosan akkor kohomológ 1-gyel, ha $f(g) = m^{-1}f(m)$, minden $m \in M$-re, ezeket hívjuk az 1-kohatárnak.
Ezek után kimondhatjuk az eddigi legjelentősebb, beszámolót záró tételt, amelyet bizonyítás nélkül közlök.

2. Tétel. *(Tate-Sen) Legyen $\eta : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ egy folytonos karakter, ekkor $i = 0, 1$ esetén igaz az alábbi kanonikus izomorfizmusí.*

$$H^i_{\text{cont}}(G_K, \mathbb{C}_K(\eta)) \cong \begin{cases} K & \text{ha } \eta(I_K) \text{ véges,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A tétel bizonyításához Tate és Sen munkája nyomán Colmez létrehozott egy formalizmust, amelyben három (látszólag igen technikai) axióma teljesülése a $H^i_{\text{cont}}(G_K/H, W^H) \cong H^i_{\text{cont}}(G_K, W)$ izomorfizmust eredményezi tetszőleges $W \in \text{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$-re és $H \trianglelefteq G_K$-ra. Ezt fel tudjuk használni abban az esetben, amikor $\eta(I_K)$ végtelen, ugyanis $\mathbb{C}_K(\eta)^{G_{K(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}} = \widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})(\eta)$, illetve $\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})(\eta)$ felfogható úgy is, mint a $\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ K-Banach-tér, amelyen a Galois-csoport izometriákon keresztül hat. Innen a funkcionálanalízis módszereivel látható be a kohomológia trivialitása. (A teljes bizonyításhoz mély elágazáselméleti és lokális osztálytest-elmélet szükségeltetik.)

5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a $\eta = \chi^r$ választással a tétel a 4 Megjegyzés és a 4 Állítás után a következő esetre egyszerűsödik:*

$$H^i_{\text{cont}}(G_K, \mathbb{C}_K(r)) \cong \begin{cases} K & \text{ha } r = 0 \\ 0 & \text{ha } r \neq 0. \end{cases}$$

A tétel $i = 0$ esete speciálisan azt mondja, hogy $\mathbb{C}_K$-nak nincs transzcendens G_K-invariáns eleme, illetve hogy nincs olyan nem 0 eleme, amelyen G_K az χ^{-r}-n keresztül hat, ha $r \neq 0$. Másrészt az $i = 1$ eset azért fontos számunkra, mert belátható, hogy

$H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{C}_K(r))$ épp a $0 \to W \to W' \to \mathbb{C}_k \to 0$ bővítéseket klasszikfikálja (izomorfizmus erejéig), ahol $W, W' \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$.

Hivatkozások

[1] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang, *Theory of p-adic Galois representations,* `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf` (Utolsó frissítés: 2023.05.26.).
[2] Olivier Brinon and Brian Conrad, *CMI Summer School notes on p-adic Hodge theory (preliminary version), 2009,* `https://math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf` (Utolsó frissítés: 2023.05.26.).
[3] Romyar Sharifi, *Group and galois cohomology,* `http://math.ucla.edu/sharifi/groupcoh.pdf` (Utolsó frissítés: 2023.05.26.).
[4] Serin Hong, *Notes on p-adic Hodge theory,* `http://www-personal.umich.edu/~serinh/teaching/Notes%20on%20p-adic%20Hodge%20theory.pdf` (Utolsó frissítés: 2023.05.26.).
[5] Zábrádi Gergely, *Algebrai számelélet (jegyzet), 2020,* `https://zabradi.web.elte.hu/Jegyzetek/algszamjegyzet.pdf` (Utolsó frissítés: 2023.05.26.).