Irányított hipergráfok színezése

Szabó Balázs István

Témavezető: Keszegh Balázs

1. Bevezetés

Az előző félévi kutatómunkámat folytatva irányított hipergráfok színezhetőségét vizsgáltam. Irányított hipergráf alatt olyan hipergráfot értünk, amelyben minden hiperél csúcshalmaza két diszjunkt részre van osztva, az egyiket fejnek a másikat talpnak nevezzük. A továbbiakban olyan irányított 3-uniform hipergráfokkal foglalkozunk, amelyekben minden élnek két talppontja és egy fejpontja van, ezeket nevezzük $2 \to 1$ hipergráfnak. Egy ilyen hiperélt $ab \to c$ alakban írhatunk, ahol a és b jelöli a két talppontot és c a fejpontot. Azt mondjuk, hogy egy H irányított hipergráf k színnel színezhető, ha létezik a csúcsoknak olyan színezése, amelyben minden hiperél tartalmaz legalább két színt, azaz nincs egyszínű hiperél. A legkisebb ilyen k egész számot jelölje $\chi(H)$. Az előző félévben azt vizsgáltuk, hogy ha egy $2 \to 1$ hipergráf elkerül egy adott két élből álló $2 \to 1$ hipergráfot, akkor az hány színnel való színezhetőséget garantál. Cameron korábban $2 \to 1$ hipergráfok extremális számát vizsgálta [2]. A két élet tartalmazó $2 \to 1$ hipergráfok:

$$
\begin{aligned}
V(D) &= \{a,b,c,d,e,f\}, \quad E(D) = \{ab \to c, de \to f\} \\
V(H_2) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(H_2) = \{ab \to c, ab \to d\} \\
V(I_1) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(I_1) = \{ab \to c, ad \to c\} \\
V(R_3) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(R_3) = \{ab \to c, bc \to d\} \\
V(E) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(E) = \{ab \to c, dc \to b\} \\
V(I_0) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(I_0) = \{ab \to e, cd \to e\} \\
V(H_1) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(H_1) = \{ab \to c, ad \to e\} \\
V(R_4) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(R_4) = \{ab \to c, cd \to e\}
\end{aligned}
$$

Jelölje $\mathcal{F}$ azon $2 \to 1$ hipergráfok családját, amelyek elkerülik az F hipergráfot. Definiáljuk $\mathcal{F}$ kromatikus számát a következőképpen: $\chi(\mathcal{F}) = \sup\{\chi(H) : H$ elkerüli F-et$\}$. Az előző félév végén nyitott kérdés maradt, hogy $\chi(\mathcal{R}_4)$ 2 vagy 3, valamint $\chi(\mathcal{I}_0)$ esetén a legjobb felső korlát 4 volt, a legjobb alsó korlát pedig 3. Ezen nyitott kérdések a 2 szakaszban megválaszolásra kerülnek. Az eredményeket a következő táblázat foglalja össze.

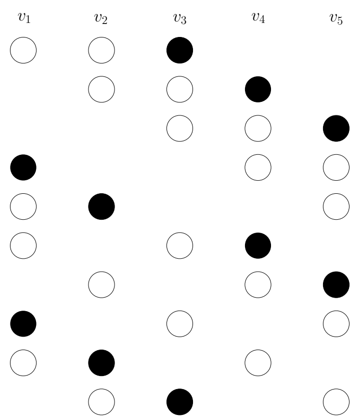
	$\mathcal{D}$	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{I}_0$	$\mathcal{H}_1$	$\mathcal{R}_4$
kromatikus szám	3	∞	∞	∞	∞	3	2	3

2. I_0 és R_4 esete

Ha egy 2→1 hipergráf elkerüli I_0-t, akkor 2 szín nem mindig elég a kiszínezéséhez. Erre példa az előző félévben konstruált R hipergráf:

$$
\begin{aligned}
V(R) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\
E(R) &= \{v_1v_2 \to v_3, v_2v_3 \to v_4, v_3v_4 \to v_5, v_4v_5 \to v_1, v_5v_1 \to v_2, \\
&\quad v_1v_3 \to v_4, v_2v_4 \to v_5, v_3v_5 \to v_1, v_4v_1 \to v_2, v_5v_2 \to v_3\}
\end{aligned}
$$

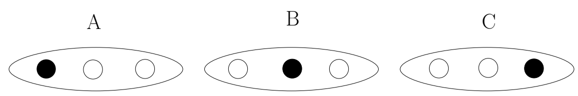
Könnyen ellenőrizhető, hogy R elkerüli I_0-t és nem színezhető két színnel.



1. ábra. R hipergráf

2.1. Tétel. *Legyen H egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy H elkerüli I_0-t, azaz ha $E_1, E_2 \in E(H)$ és $E_1 \cap E_2 = \{v\}$, akkor v legalább az egyik élnek talppontja. Ekkor H 3 színnel színezhető.*

Bizonyítás: Legyen a három szín kék, piros és zöld, valamint jelölje V a H csúcsainak halmazát. Kezdetben vegyük a csúcsoknak egy tetszőleges sorrendjét $v_1, v_2, ..., v_n$. A hiperéleket három csoportba sorolhatjuk aszerint, hogy a fejpont és a talppontok milyen sorrendben követik egymást, ahogy azt az 2 ábra mutatja. Legyen $A = \{v_iv_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : k < i, k < j\}$, $B = \{v_iv_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : ((k < i) \wedge (j < k)) \vee ((k < j) \wedge (i < k))\}$ és $C = \{v_iv_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : i < k, j < k\}$. A színezés előtt rendezzük a



2. ábra.

csúcsokat. Minden v_i $(i=1,2,...,n)$ csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e két B-beli él amelyeknek v_i a fejpontja és a két magasabb indexű talppontjuk egybeesik, jelölje $p(v_i)$. Ha nem létezik ilyen élpár, akkor tovább lépünk a v_{i+1} csúcsra. Ellenkező esetben meggondolható, hogy $p(v_i)$ egyértelmű, mert különben H tartalmazna I_0-t. A $p(v_i)$ csúcsot áthelyezzük az $(i+1)$-edik helyre, a v_i és $p(v_i)$ közé eső csúcsok indexét pedig 1-gyel növeljük. Az A, B és C halmazokat pedig az új sorrendnek megfelelően frissítjük. Ezután tovább lépünk a v_{i+1} $(=p(v_i))$ csúcsra. A következőkben egy e hiperél fejpontját jelölje $h(e)$, kisebb indexű talppontját $t_1(e)$, nagyobb indexű talppontját $t_2(e)$. A színezési algoritmus a következő.

1. lépés: Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. Ezután a v_1 csúcstól elindulva sorban minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan $B\cup C$-beli él, amelynek v_i a fejpontja és az él minden pontja kék. Ha nem létezik ilyen él, akkor tovább lépünk a v_{i+1} csúcsra. Ha létezik ilyen él, jelölje az egyiket e, akkor a v_i csúcsot átszínezzük pirosra. Ha így nem keletkezik egyszínű piros $B\cup C$-beli él, akkor tovább lépünk a következő csúcsra. Tegyük fel, hogy a v_i csúcs pirosra színezésével keletkeznek egyszínű $B\cup C$-beli élek, jelölje ezeket $f_1, f_2, ..., f_k$. Ha $f_j \in C$, akkor e és f_j I_0-t alkot. Tehát $f_1, f_2, ..., f_k \in B$. Ekkor $t_2(f_j)=v_i$. Mivel f_j fejpontját pirosra színeztük, volt egy $g_j \in B\cup C$ egyszínű kék él, amelynek $h(f_j)$ volt a fejpontja. Ha $g_j \in C$, akkor f_j és g_j I_0-t alkotna. Tegyük fel, hogy $g_j \in B$. Ekkor $h(f_j)=h(g_j)$ és $t_1(f_j) \neq = t_1(g_j)$, mivel $t_1(f_j)$ piros, $t_1(g_j)$ pedig kék. Ebből következik, hogy $t_2(f_j)=t_2(g_j)$, mert különben f_j és g_j I_0-t alkotna. Ekkor $h(f_j)=h(g_j)$ és $t_2(f_j)=t_2(g_j)$, vagyis $p(h(f_j))$ létezik és $p(h(f_j))=t_2(f_j)=v_i$. A színezés előtti rendezésnek köszönhetően $h(f_j)=v_{i-1}$ minden $j=1,2,...,k$ esetén. A v_{i-1} csúcsot visszaszínezzük pirosról kékre. Ezzel $h(f_j)$ kék színű, $t_2(f_j)$ pedig piros minden j-re. Tegyük fel indirekt, hogy a visszaszínezéssel keletkezik olyan $B\cup C$-beli egyszínű kék él, amelynek a fejpontja v_i-nél kisebb indexű, legyen d egy ilyen él. Ha $d\in C$, akkor $h(d)=v_{i-1}$. Ekkor d és f_1 I_0-t alkotna. Ha $d\in B$, akkor $h(d)=v_{i-1}$ vagy $t_2(d)=v_{i-1}$ teljesül. Ha $h(d)=v_{i-1}$, akkor d és f_1 szintén I_0-t alkotna, vagyis $t_2(d)=v_{i-1}$. Ez pedig azt jelentené, hogy a $h(d)$ csúcsot nem színeztük pirosra annak ellenére, hogy d egyszínű kék volt, ami ellentmondás. Tehát minden $B\cup C$-beli él, amelynek a fejpontja $(i+1)$-nél kisebb indexű jól színezett, így tovább léphetünk a v_{i+1} csúcsra. Ezzel egy olyan színezést kapunk, amelyben minden $B\cup C$-beli él jól színezett.

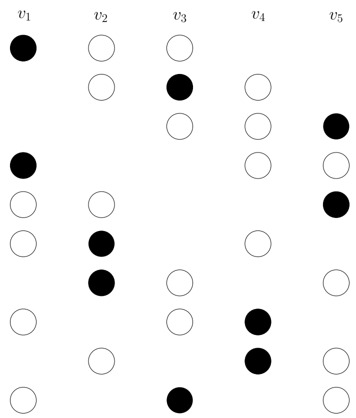
2. lépés: A v_n csúcstól elindulva visszafelé haladva minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan A-beli él, amelynek v_i a fejpontja és egyszínű. Ha létezik ilyen él, akkor v_i csúcsot átszínezzük zöldre, különben pedig továbblépünk a v_{i-1} csúcsra. Az így kapott színezésben minden olyan A-beli élnek van zöld csúcsa, ami egyszínű piros vagy kék volt az 1. lépés után. Ugyanakkor egyszínű zöld nem lehet egyik A-beli él sem, vagyis az összes A-beli él jól színezett. Tegyük fel indirekt, hogy keletkezik egyszínű zöld $B\cup C$-beli él, legyen e egy ilyen él. Mivel a $h(e)$ csúcsot zöldre színeztük, így létezik egy $f\in A$ él, amelynek mind a két talppontja zöldtől

különböző színű. Ekkor e és f I_0-t alkot, ami ellentmondás. Tehát továbbra is minden $B \cup C$-beli él jól színezett. Ezzel H egy jó színezését kaptuk 3 színnel. $\square$

A 2 színnel való színezhetőségnek nem elégséges feltétele R_4 elkerülése, amire példa a következő hipergráf:

$$\begin{aligned} V(Q) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(Q) &= \{v_1v_2 \to v_5, v_2v_3 \to v_1, v_2v_4 \to v_3, v_3v_4 \to v_5, v_4v_5 \to v_1, \\ &\quad v_1v_4 \to v_2, v_3v_5 \to v_2, v_1v_3 \to v_4, v_2v_5 \to v_4, v_1v_5 \to v_3\} \end{aligned}$$

A Q hipergráfot akárhogy színezzük 2 színnel a skatulyaelv miatt mindig lesz 3 azonos színű csúcs és mivel minden csúcshármas hiperélt alkot, így lesz egyszínű hiperél.



3. ábra. Q hipergráf

A 3-színezhetőségnek viszont elégséges feltétele, ami az előző félévben bizonyított 2.2 tételből következik.

2.2. Tétel. *Legyen H egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy H elkerüli R_4-et, azaz ha $E_1, E_2 \in E(H)$ és $E_1 \cap E_2 = \{v\}$, akkor v vagy mindkettőnek fejpontja, vagy mindkettőnek talppontja. Ekkor H 3 színnel színezhető.*

Az I_0 és R_4 hipergráfok elkerülése külön-külön nem garantál 2-színezhetőséget, viszont ha egy $2 \to 1$ hipergráf mind a kettőt elkerüli, akkor 2-színezhető.

2.3. Tétel. *Legyen H egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy H elkerüli I_0-t és R_4-et is. Ekkor H 2 színnel színezhető.*

Bizonyítás: Vegyük a piros és kék színeket, valamint jelölje $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ a H csúcsainak halmazát. A következőkben egy e hiperél fejpontját jelölje $h(e)$, kisebb indexű talppontját $t_1(e)$, nagyobb indexű talppontját $t_2(e)$.
Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. A v_1 csúcstól elindulva sorban minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan él, amelynek a fejpontja v_i és az él

minden pontja kék. Ha létezik ilyen él, akkor a v_i csúcsot átszínezzük pirosra. Vegyük észre, hogy az így kapott színezésben minden élnek van piros csúcsa, vagyis elegendő belátni, hogy nincs egyszínű piros él. Tegyük fel indirekt, hogy létezik e él, ami egyszínű piros. Jelölje u azt a csúcsot, amelyet pirosra színezve e egyszínű piros lett. Mivel u-t pirosra színeztük, így létezik egy f él, amelyre $h(f) = u$ és f két talppontja kék színű u pirosra színezésekor. Ha $u = t_1(e)$ vagy $u = t_2(e)$, akkor e és f R_4-et alkot, ami nem lehetséges. Tegyük fel, hogy $u = h(e)$. Ekkor e és f I_0-t alkot, ami ellentmondás. Tehát nincs egyszínű piros él, amiből következik, hogy a kapott színezés jó. □

3. Összefoglalás

Összességében elmondható, hogy a kételű $2 \to 1$ hipergráfok közül a H_1 elkerülése a legerősebb feltétel színezés szempontjából, ami 2-színezhetőséget garantál. A D, I_0 és R_4 hipergráfok kitiltásai pedig 3-színezhetőséget garantálnak.

Hivatkozások

[1] Balázs Keszegh, Coloring directed hypergraphs. Elsevier, 2023.

[2] Alex Cameron. Extremal numbers for directed hypergraphs with two edges. Electron. J. Combin., 25(1): P1.56, 2018.