Témák

1. Homológikus algebra
   - derivált (származtatott) funktorok
   - Ext és Tor konstrukciója
   - modulusok bővítései és az Ext; Yoneda-szorzat
   - homologikus dimenziók; nevezetes tételek és sejtések

2. Reprezentációelmélet (alkalmazott homologikus algebra)
   - majdnem felhasadó sorozatok (Auslander–Reiten-elmélet)
   - AR-gráf, reprezentációtípus
   - Brauer–Thrall-sejtések; Auslander bizonyítása

Irodalom:

(1.1) Rotman: Introduction to homological algebra (AP 1979, Springer 2009)

(1.2) Weibel: An introduction to homological algebra (CUP 1994)

(1.3) MacLane: Homology (Springer, 1964)

(2.1) Assem – Simson – Skowroński: Elements of the representation theory of associative algebras (CUP 2007)

(2.2) Auslander – Reiten – Smalø: Representation theory of Artin algebras (CUP 1995)

(2.3) Schiffler: Quiver representations (Springer 2014)

(2.4) Erdmann – Holm: Algebras and representation theory (Springer 2018)

\+ cikkek

Lehetséges folytatás: 1. a) Csoportkohomológiák; b) Spektrális sorozatok c) Derivált kategóriák …

2. a) Öninjektív algebrák b) Szelíd algebrák …

1. fejezet: Derivált (származtatott) funktorok

1.1. Def. (Emlékeztető). Komplexus v. lánckomplexus (R-Mod-ban):

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \to \cdots$$

félig egzakt sorozat, ahol: $M_i \in R\text{-Mod}$, és $d_i d_{i+1} = 0 \ \forall i$

$\Updownarrow$

Jelölés: $(M_\cdot, d_\cdot)$ $\qquad \operatorname{Im} d_{i+1} \subseteq \operatorname{Ker} d_i$

$d_i \in \operatorname{Hom}_R(M_i, M_{i-1})$ a komplexus differenciálja v. határleképezése.

1.2. Def R gyűrű; $C(R)$ az R feletti modulusok komplexusainak a kategóriája a láncleképezésekkel:

$f_\cdot : (M_\cdot, d_\cdot) \to (N_\cdot, \partial_\cdot)$:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & {} \\
\arrow[r] & N_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & N_n \arrow[r, "\partial_n"'] & N_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

(kommutatív)

Helyesebb lenne: $C(R\text{-Mod})$; általában, ha $\mathcal{K} \subseteq R\text{-Mod}$, akkor $C(\mathcal{K})$ objektumai olyan $(M_\cdot, d_\cdot)$ komplexusok, melyekre $M_i \in \mathcal{K}$ (pontosabban Ob $\mathcal{K}$)

Pl.: $\mathcal{P}_R$ a projektívek részkategóriája: $C(\mathcal{P}_R)$

1.3. Def. $(M_\cdot, d_\cdot)$ komplexus; n-edik homológiamodulus:

$$H_n(M_\cdot) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} \qquad (\leq M_n / \operatorname{Im} d_{n+1})$$

Azaz: $H_n(M_\cdot)$ az M_n-nek egy szelete

1.4. Példák: 1) $M \in R$-Mod; M egy projektív föloldása:

$$\mathcal{P}(M)^*_\bullet : \quad \dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \to \cdots \quad \text{egzakt,}$$

P_i projektív

Itt: $H_n(\mathcal{P}(M)^*_\bullet) = 0 \quad \forall n$-re („aciklikus komplexus")

2) $\mathcal{P}(M)^*_\bullet$-ből elhagyjuk M-et: rövidített projektív föloldás, angolul: deleted complex

$$\mathcal{P}(M)_\bullet : \quad \dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots \quad \text{félig egzakt.}$$

P_i projektív, és: $H_n(\mathcal{P}(M)_\bullet) = 0$, ha $n \neq 0$

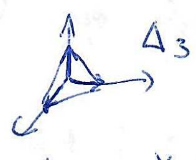
$H_0(\mathcal{P}(M)_\bullet) = M$

Így $\mathcal{P}(M)_\bullet$ egy homológia formájában kódolja el az eredeti M modulust. Előnye $\mathcal{P}(M)^*_\bullet$-gal szemben, hogy $\mathcal{P}(M)_\bullet \in C(\mathcal{P}_R)$, aminek vannak különösen jó tulajdonságai.

3) X topologikus tér

$S_n(X) = \langle \sigma \mid \sigma : \Delta_n \to X \text{ folytonos} \rangle$ szabad Abel-csoport

Itt $\Delta_n = \{0, \underline{e}_1, \dots \underline{e}_n\}$ konvex burka $\mathbb{R}^n$-ben



σ neve: n-szimplex X-ben.

Tehát pl.: $S_0(X) = \langle X \text{ pontjai} \rangle$

$S_1(X) = \langle X\text{-beli görbék} \rangle$ stb.

Ha $\sigma \in S_n(X)$ egy n-szimplex:

$$\partial_n \sigma = \sum_0^n (-1)^i \sigma_i \,, \quad \text{ahol } \sigma_i \text{ az } \underline{\text{i-edik lapja}} \ \sigma\text{-nak}$$

Kapunk egy: $\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ homomorfizmust AB-ben.

Meg lehet mutatni: $\partial_{n-1} \partial_n = 0$, azaz:

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

egy komplexus, azaz $\in C(AB)$ vagy $C(\mathbb{Z})$.

Ezt az $S_\cdot(X)$ komplexust nevezik az X <u>szinguláris komplexusának</u>, $H_n(S_\cdot(X))$ az X <u>n-edik szinguláris homológiája</u>.

4) Ha $(M_\cdot, d_\cdot)$ komplexus, $F : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ additív funktor, akkor $(F_\cdot(M_\cdot), F_\cdot(d_\cdot)) \in C(S)$: a félegzaktság megmarad az additivitás miatt.

(Itt tkp: $F : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod} \Rightarrow F_\cdot : C(R) \longrightarrow C(S)$; a láncleképezések láncleképezésbe mennek a funktorialitás miatt. Meg lehet mutatni azt is, hogy $F_\cdot$ is additív.)

Ugyanez megcsinálható egy kontravariáns funktor esetén is.

<u>1.5. Állítás</u>. $H_n : C(R) \longrightarrow R\text{-Mod}$ funktor $\forall n$-re.

<u>Biz.</u> Meg kell adni a morfizmusokon is H_n hatását.

Legyen $f_\cdot \in \mathrm{Hom}(M_\cdot, N_\cdot)$ (valójában: $\mathrm{Hom}_{C(R)}((M_\cdot, d_\cdot), (N_\cdot, \partial_\cdot))$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\arrow[r] & N_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & N_n \arrow[r, "\partial_n"'] & N_{n-1} \arrow[r] &
\end{tikzcd}$$

Legyen $x \in \mathrm{Ker}\, d_n$; $[x] = x + \mathrm{Im}\, d_{n+1}$. Ekkor:

$$H_n(f_\cdot)[x] = [f_n(x)]$$

Három dolgot kell megmutatni:

1) $f_n(x) \in \mathrm{Ker}\, \partial_n$, azaz $H_n(f_\cdot)$ valóban $H_n(N_\cdot)$-be képez

2) $H_n(f_\cdot)$ jól van definiálva, azaz $H_n(f_\cdot)[x]$ nem függ az $x \in [x]$ választásától

3) H_n funktoriális a morfizmusokon, azaz őrzi a $\circ$-t, 1-et.

Részletesen:

1)
$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[ddd, mapsto, bend right] & 0 \arrow[ddd, mapsto, bend left] \\
M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
N_n \arrow[r, "\partial_n"'] & N_{n-1} \\
f_n(x) \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow\downarrow 0$ miatt $\downarrow\rightarrow 0$

2)
$$\begin{tikzcd} M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & M_n \arrow[d, "f_n"] \\ N_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & N_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \ni y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "f_n"] & x + y' \arrow[d, mapsto, "f_n"] \\ f_{n+1}(y) \arrow[r, mapsto] & f_n(x) + f_n(y') \end{tikzcd}$$

És itt: $[x] = [x+y']$ esetén

$[f_n(x)] = [f_n(x) + f_n(y')]$, hiszen $f_n(y') \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

3) Világos.

Ezzel beláttuk, hogy H_n funktor.

<u>1.6. Def.:</u> $f_\cdot, g_\cdot \in \operatorname{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)$ <u>homotópok</u> (jele: $f_\cdot \sim g_\cdot$), ha $\forall i$ $\exists s_i : M_i \to N_{i+1} \in \operatorname{Hom}_R(M_i, N_{i+1})$, hogy:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] & M_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] \arrow[dl, "s_i"'] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] & {} \\ \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"'] & N_i \arrow[r, "\partial_i"'] & N_{i-1} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$$f_i - g_i = s_{i-1} d_i + \partial_{i+1} s_i$$

(Röviden: $f - g = sd + \partial s$)

$f_\cdot$ <u>0-homotóp</u>, ha $f_\cdot \sim 0_\cdot$, azaz $f_\cdot = sd + \partial s$.

1.7. Áll. $\sim$ ekvivalenciareláció $\mathrm{Hom}(M_\cdot, N_\cdot)$-ben.

Biz.: 1) $f_\cdot \sim f_\cdot$ $\qquad s_n = 0$

2) $f_\cdot \sim g_\cdot \Rightarrow g_\cdot \sim f_\cdot$ $\qquad t_n = -s_n$

3) $f_\cdot \sim g_\cdot,\ g_\cdot \sim h_\cdot \Rightarrow f_\cdot \sim h_\cdot$ $\qquad u_n = s_n + t_n$

Megjegyzés: $\sim$ tkp. kongruencia is, azaz kompatibilis a $\mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)$-beli összeadással:

$$\{ f_\cdot \in \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot) \mid f_\cdot \sim 0_\cdot \} \leq \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)$$

Ez következik a $\sim$ „additív" feltételből.

1.8. Áll.: $K(R)$ homotópiakategória:

$$\mathrm{Ob}(K(R)) = \mathrm{Ob}(C(R))$$

$$\mathrm{Hom}_{K(R)}(M_\cdot, N_\cdot) = \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)/\sim$$

1.9. Def. $M_\cdot, N_\cdot \in C(R)$ homotopikusan ekvivalensek (jel.: $M_\cdot \sim N_\cdot$), ha izomorfak $K(R)$-ben, azaz: $\exists\, f_\cdot \in \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)$ és $g_\cdot \in \mathrm{Hom}_{C(R)}(N_\cdot, M_\cdot)$, hogy:

1) $g_\cdot f_\cdot \sim 1_{M_\cdot}$

2) $f_\cdot g_\cdot \sim 1_{N_\cdot}$

1.10. Megj. $F: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ additív $\Rightarrow$
$F_\cdot: C(R) \to C(S)$ additív $\Rightarrow$ $\tilde{F}: K(R) \to K(S)$ additív.

1.11. Áll. $f_\cdot, g_\cdot \in \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)$, $f_\cdot \sim g_\cdot \Rightarrow$

$\forall n$: $H_n(f_\cdot) = H_n(g_\cdot)$, azaz:

homotóp láncleképezések ugyanazt a leképezést indukálják a homológiákon.

Biz.: $[x] \in H_n(M_\cdot)$-re:

$$H_n(f_\cdot)[x] = [f_n(x)] = [g_n(x) + \underbrace{\partial_{n+1} s_n(x)}_{\in \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}} + s_{n-1} \underbrace{d_n(x)}_{\substack{=0 \\ (x \in \mathrm{Ker}\, d_n)}}]$$

$$= [g_n(x)]$$

1.12. Def: $f_\cdot, g_\cdot \in \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot)$; $f_\cdot$ és $g_\cdot$ homológok (jel.: $f_\cdot \equiv g_\cdot$), ha $H_n(f_\cdot) = H_n(g_\cdot)$ $\forall n$-re.

1.13. Köv: $f_\cdot \sim g_\cdot \Rightarrow f_\cdot \equiv g_\cdot$

Megj.: A homotópia „jobb": megőrződik az additív funktoroknál; az, hogy $f_\cdot \equiv g_\cdot$, lehet „véletlen" is.

1.14. Köv: $M_\cdot \sim N_\cdot \Rightarrow H_n(M_\cdot) \cong H_n(N_\cdot)$ $\forall n$-re, azaz homotopikusan ekvivalens komplexusok homológiái izomorfak.

Biz. $\exists f_\cdot, g_\cdot$: $g_\cdot f_\cdot \sim 1_{M_\cdot} \Rightarrow H_n(g_\cdot f_\cdot) = H_n(1_{M_\cdot}) = 1_{H_n(M_\cdot)}$

$$\| $$

$H_n(g_\cdot) \circ H_n(f_\cdot)$

a funktorialitás miatt

Hasonlóan: $H_n(f_\cdot)\circ H_n(g_\cdot) = 1_{H_n(N_\cdot)}$

Így $H_n(f_\cdot)$ és $H_n(g_\cdot)$ inverz izomorfizmusok.

1.15. Állítás $f \in \mathrm{Hom}_{C(R)}(M_\cdot, N_\cdot) \Longrightarrow$

$(\mathrm{Ker}\, f_\cdot,\ d_\cdot|_{\mathrm{Ker} f_\cdot}) \in C(R)$ és

$(\mathrm{Im}\, f_\cdot,\ \partial|_{\mathrm{Im} f_\cdot}) \in C(R)$

Így beszélhetünk $C(R)$-beli egzakt sorozatokról.

Biz Pl. a magra:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f_{n+1} \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker} f_n \ni x \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker} f_{n-1} \overset{?}{\ni} y \arrow[d, hook] \\
\to M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & M_n \ni x \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n-1} \ni y \to \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
\to N_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & N_n \ni 0 \arrow[r, "\partial_n"] & N_{n-1} \ni 0 \to
\end{tikzcd}$$

Tehát $y \in \mathrm{Ker} f_{n-1}$, vagyis: $d_n(\mathrm{Ker} f_n) \subseteq \mathrm{Ker} f_{n-1}$.

A félegzaktság a definícióból világos.

Hasonlóképpen a képre is.

Megjegyzés: Értelmezhető a 0. komplexus is, így beszélhetünk komplexusok rövid egzakt sorozatáról is.

1.16. Tétel: (Homológia hosszú egzakt sorozata).

Legyen $0_\cdot \to M'_\cdot \xrightarrow{f_\cdot} M_\cdot \xrightarrow{g_\cdot} M''_\cdot \to 0_\cdot$ rövid egzakt $C(R)$-ben.

Ekkor $\forall n$-re $\exists\, \partial = \partial_n : H_n(M''_\cdot) \longrightarrow H_{n-1}(M'_\cdot)$ homomorfizmus, az ún. összekötő homomorfizmus, mellyel az alábbi sorozat egzakt lesz:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(M'_\cdot) \arrow[r, "H_n(f_\cdot)"] & H_n(M_\cdot) \arrow[r, "H_n(g_\cdot)"] & H_n(M''_\cdot) \arrow[r, "\partial_n"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{n-1}(M'_\cdot) \arrow[r, "H_{n-1}(f_\cdot)"] & H_{n-1}(M'_\cdot) \arrow[r, "H_{n-1}(g_\cdot)"] & H_{n-1}(M_\cdot) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Biz. A konstrukció:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"] & M'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M'_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & {} \\
{} \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"] & M_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-2}"] & {} \\
{} \arrow[r] & M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"] \arrow[d] & M''_n \arrow[r, "d''_n"] \arrow[d] & M''_{n-1} \arrow[r, "d''_{n-1}"] \arrow[d] & M''_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Definiáljuk $[x] \in H_n(M''_\cdot)$-re $\partial_n[x]$-et:

$[x] \in H_n(M''_\cdot) \Rightarrow x \in M''_n,\ x \in \operatorname{Ker} d''_n$

g_n szürjektív $\Rightarrow \exists\, y \in M_n:\ g_n(y) = x$

De akkor $d_n(y) \in \operatorname{Ker} g_{n-1}$, mivel $g_{n-1} d_n(y) = d''_n g_n(y)$,

de $d''_n g_n(y) = d''_n(x) = 0$, mivel $x \in \operatorname{Ker} d''_n$.

Viszont $0 \to M'_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} M''_{n-1} \to 0$ egzakt, így

$$
\begin{array}{ccc}
M_{n-1} & & M''_{n-1} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
d_n(y) & \longmapsto & 0
\end{array}
$$

$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} g_{n-1} \Rightarrow d_n(y) \in \operatorname{Im} f_{n-1} \Rightarrow \exists!\, z \in M'_{n-1}:\ f_{n-1}(z) = d_n(y)$

Legyen ekkor: $\partial_n([x]) = [z]$.

Meg kell mutatni, hogy:

(1) ∂_n jól van definiálva, azaz:

a) $z \in \operatorname{Ker} d_{n-1}$, azaz valóban $H_{n-1}(M')$-be képezünk

b) $[z]$ választása független y választásától

c) $[z]$ választása független x választásától (pontosabban: $x \in [x]$ választásától)

(2) Meg kell mutatni az egzaktságot 3 helyen, azaz 6 db. tartalmazást kell igazolni.

(1.a) Először megmutatjuk: $\partial_n([x]) \in H_{n-1}(M')$, azaz $z \in \operatorname{Ker} d'_{n-1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & d'_{n-1}(z) \arrow[d, "f_{n-2}"] \\
y \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & d_n(y) \arrow[r, "d_{n-1}"] & 0 \\
x & &
\end{tikzcd}$$

De f_{n-2} injektív $\Rightarrow d'_{n-1}(z) = 0$.

Így ∂_n valóban $H_{n-1}(M')$-be képez.

(1.b) Mi történik, ha y helyett y'-t választunk, amelyre

$g_n(y) = g_n(y') = x$

Ekkor: $g_n(y) - g_n(y') = g_n(y'-y) = 0 \Rightarrow y'-y \in \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n$

Tehát: $\exists\, z' \in M'_n : \quad y' = y + f_n(z')$.

$$\begin{tikzcd}
z' \arrow[r, mapsto, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"] & z + d'_n(z') \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
y' = y + f_n(z') \arrow[r, mapsto, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & d_n(y') = d_n(y) + d_n f_n(z') \\
x &
\end{tikzcd}$$

$$d_n f_n(z') = f_{n-1} d'_n(z')$$

Mivel f_{n-1} injektív, y'-höz konkrétan

$z + d_n(z')$-t választja,

de ez azt is jelenti, hogy $[z] = [z + \underset{\uparrow \atop \operatorname{Im} d_n}{d'_n(z')}]$

c) Végezetül cseréljük x-et x'-re, hogy $[x] = [x']$ legyen.

Ez tehát azt jelenti, hogy $x' = x + d''_{n+1}(x'')$ valamely $x'' \in M''_{n+1}$-re.

$$\begin{tikzcd}
\exists\, y'' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g_{n+1}"] & y + \boxed{d_{n+1}(y'')} \arrow[d] \\
x'' \arrow[r, mapsto] & x + \boxed{d''_{n+1}(x'')}
\end{tikzcd}$$

y'' létezik, mert g_{n+1} szürjektív, továbbá

$y + d_{n+1}(y'')$ választható

$x' = x + d''_{n+1}(x'')$ ősképének.

Ugyanakkor $y + d_{n+1}(y'') \xmapsto{d_n} d_n(y) + \underbrace{d_n d_{n+1}(y'')}_{=0}$

Tehát valóban a homológiákon adtunk meg egy megfeleltetést.

2. Igazolnunk kell a sorozat egzaktságát

Félig egzaktság: a) Ez világos $H_n(M_\cdot)$-nél, mert $g_\cdot f_\cdot = 0$, így
$H_n(g_\cdot)\, H_n(f_\cdot) = 0$.

De világos ∂_n végpontjainál is:

b) $H_{n-1}(M'_\cdot)$-nél:

$[z] = \partial_n[x]$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[d] \\ y \arrow[r] \arrow[d] & d_n(y) \\ x & \end{tikzcd}$$

$d_n(y) = f_{n-1}(z) \in \operatorname{Im} d_n$

$$[x] \xrightarrow{\partial_n} [z] \longrightarrow [f_{n-1}(z)] = [d_n(y)] = 0, \quad d_n(y) \in \operatorname{Im} d_n$$

c) $H_n(M''_\cdot)$-nél: $y \in \operatorname{Ker} d_n \Rightarrow$

$z = \partial_n[x]$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ y \arrow[r] \arrow[d] & d_n(y) \\ x & \end{tikzcd}$$

$d_n(y) = 0$

$$[y] \longrightarrow [x] \xrightarrow{\partial_n} [z]$$

Mivel $d_n(y) = 0$, és f_{n-1} injektív
$\Rightarrow z = 0 \Rightarrow [z] = 0$.

Egzaktság a) $H_n(M'_\cdot)$-ben: Tf. fel:

$$H_{n+1}(M''_\cdot) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(M'_\cdot) \xrightarrow{H_n(f_\cdot)} H_n(M_\cdot)$$

$$[z] \longmapsto 0$$

Ez azt jelenti, hogy $f_n(z) = d_{n+1}(y)$ valamilyen $y \in M_{n+1}$-re.

Ekkor viszont $[z] = \partial_{n+1}[g_{n+1}(y)]$, azaz $z \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & M'_n \arrow[d, "f_n"'] & z \arrow[d, mapsto] \\
M_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & M_n & d_{n+1}(y) \\
M''_{n+1} & y \arrow[ur, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \\
 & g_{n+1}(y) &
\end{tikzcd}$$

b) $H_n(M''_\cdot)$-ben: T. föl:

$$\begin{tikzcd}
H_n(M_\cdot) \arrow[r, "H_n(g_\cdot)"] & H_n(M''_\cdot) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(M'_\cdot) \\
 & {[x]} \arrow[u, phantom, "\Downarrow" description] \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

Ez azt jelenti, hogy $\exists\, u \in M'_n$ az alábbi diagramon:

$$\begin{tikzcd}
M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] & M'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & {} \\
M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & M_{n-1} & \\
M''_n \arrow[d] & & \\
0 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, mapsto] & z \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & d_n(y) \\
x &
\end{tikzcd}$$

Legyen $y' = y - f_n(u)$

Világos, hogy:

$g_n(y') = g_n(y)$, mivel

$g_n f_n(u) = 0$.

Másrészt:
$$\begin{aligned}
d_n(y') &= d_n(y) - d_n f_n(u) = \\
&= d_n(y) - f_{n-1} d'_n(u) = \\
&= d_n(y) - f_{n-1}(z) = 0
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $y' \in \operatorname{Ker} d_n$, és így $x = g_n(y')$ miatt

$[x] \in \operatorname{Im} H_n(g_\cdot)$

c) $H_n(M_\cdot)$-ban:

$$H_n(M'_\cdot) \xrightarrow{H_n(f_\cdot)} H_n(M_\cdot) \xrightarrow{H_n(g_\cdot)} H_n(M''_\cdot)$$

$$\begin{array}{ccc} & \Downarrow & \\ & [y] & \longmapsto \quad 0 \end{array}$$

Ez azt jelenti, hogy $H_n(g_\cdot)[y]=0$, azaz:

ha $x=g_n(y)$, akkor

$x=d''_n(x')$ valamely $x'\in M''_{n+1}$-re.

Mivel g_{n+1} szürjektív $\Rightarrow$

$\exists\, y'\in M_{n+1}$: $g_{n+1}(y')=x'$

$\Rightarrow g_n(y-d_{n+1}(y'))=$

$=g_n(y)-g_n d_{n+1}(y')=$

$=x-d''_{n+1}g_{n+1}(y')=$

$=x-d''_{n+1}(x')=x-x=0$

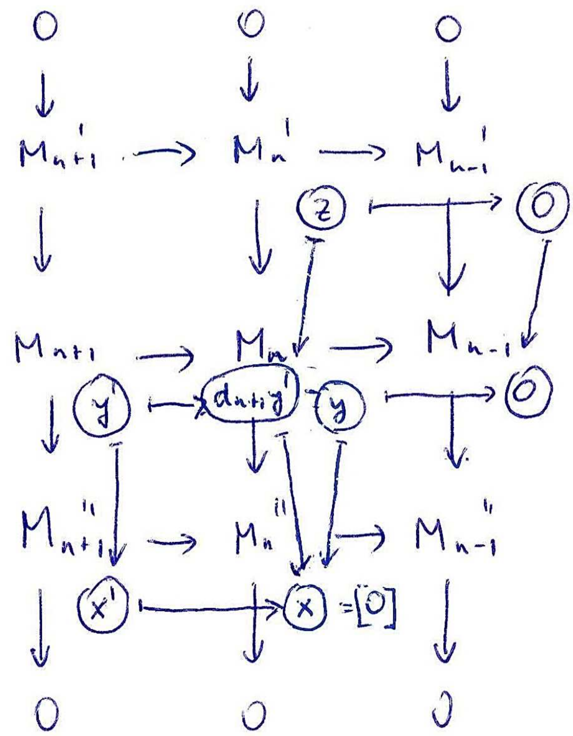
$\Rightarrow \exists\, z\in M'_n$: $f_n(z)=y-d_{n+1}(y')$

Nyilván $[y]=[y-d_{n+1}(y')]$,

továbbá $d_n(y-d_{n+1}(y'))=$

$=d_n(y)-d_n d_{n+1}(y')=0$ miatt

$d_n(z)=0$, hiszen f_{n-1} injektív.



Így $[z]\in H_n(M'_\cdot)$, és $[y]=f_n([z])$, tehát

$[y]\in \operatorname{Im} H_n(f_\cdot)$

Ezzel az egzaktságot mindenhol beláttuk.

1.17. Áll. Az összekötő homomorfizmus természetes, azaz:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & M_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\beta_\bullet"'] & M''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_\bullet"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N'_\bullet \arrow[r] & N_\bullet \arrow[r] & N''_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & H_n(M_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\beta_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(M''_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\gamma_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(M'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\alpha_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(M_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\beta_\bullet)"'] & {} \\ \arrow[r] & H_n(N_\bullet) \arrow[r] & H_n(N''_\bullet) \arrow[r] & H_{n-1}(N'_\bullet) \arrow[r] & H_{n-1}(N_\bullet) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Biz. Szokásos

1.18. Következmény (Kígyó lemma)

Tegyük föl, hogy az alábbi kommutatív diagram sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ekkor $\exists\ \partial$ összekötő homomorfizmus, mellyel az alábbi sorozat egzakt:

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{f} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{g} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{Coker}\gamma \to 0$$

(Itt: $\operatorname{Coker}\chi = X'/\operatorname{Im}\chi$, ha $\chi: X \to X'$)

Biz.: $X \in \{A, B, C\}$-re legyen:

$$X_\bullet: \quad \dots \to 0 \to X \xrightarrow{\chi} X' \to 0 \to \dots$$

Így kapjuk komplexusok egy rövid egzakt sorozatát:

$$0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0 \qquad (*)$$

Vegyük észre: $H_1(X_\bullet) = \operatorname{Ker}\chi$, $\quad H_0(X_\bullet) = \operatorname{Coker}\chi$

Így a fenti állítás adódik, ha vesszük $(*)$-ra a homológiák hosszú egzakt sorozatát.

1.19. Áll. (3×3 lemma) T. fel, hogy az alábbi diagramban az oszlopok egzaktak, és a középső sor szintén egzakt. Ekkor: felső sor egzakt $\Longleftrightarrow$ alsó sor egzakt.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Biz Következik a Kígyó-lemmából.