1.20. Emlékeztető: 1) $\forall$ modulusnak $\exists$ projektív föloldása:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{P}(M).: \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 0 \arrow[r] & {} \\
& & K_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M = K_0 & & \\
& {} \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

K_i-k az M syzygy-modulusai

Itt: $0 \to K_{i+1} \to P_i \to K_i \to 0$ rövid egzakt.

Ha R szemiperfekt, akkor „minimális projektív föloldás" is $\exists$:
itt $\forall$ i-re: $P_i \xrightarrow{p_i} K_i \to 0$ projektív fedő, azaz
$\operatorname{Ker} p_i = K_{i+1} \ll P_i$. R szemiperfekt, ha pl. véges dimenziós algebra...

A minimális projektív föloldás, ha $\exists$, egyértelmű".
A projektív föloldás nem az, hiszen pl.:

$$\ldots \xrightarrow{p_{i+2}} P_{i+1} \xrightarrow{p_{i+1}} P_i \xrightarrow{p_i} \ldots \text{ helyett vehető}$$

$$\ldots \xrightarrow{p_{i+2} \oplus 0} P_{i+1} \oplus Q \xrightarrow{p_{i+1} \oplus 1_Q} P_i \oplus Q \xrightarrow{p_i \oplus 0},$$ ahol Q tetsz. projektív.

2) $\forall$ modulusnak $\exists$ injektív (ko)föloldása:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{I}(M): & 0 \arrow[rr] & & I_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & I_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & I_2 \arrow[r] & \ldots \\
& & M = C_0 \arrow[ur] & & C_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_2 \arrow[ur] & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

C_i: kosyzygy-modulusok

Minimális koföloldás (mindig $\exists$): $C_i \trianglelefteq I_i$ injektív burok.

1.21. Állítás: Legyen $\mathcal{P}(M)_\cdot$, ill. $\mathcal{P}(M')$ egy-egy projektív feloldása $M, M' \in R$-Mod-nek. Ekkor $\exists$:

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(M'))$$

bijekció, ami Abel-csoport-izomorfizmus.

Azaz részletezve:

1) $\forall f_\cdot : \mathcal{P}(M)_\cdot \to \mathcal{P}(M')_\cdot$ indukál egy $f: M \to M'$-t.

Megfordítva:

2) $\forall \varphi: M \to M'$ indukál egy $\varphi_\cdot : \mathcal{P}(M)_\cdot \to \mathcal{P}(M')_\cdot$-t, és itt $\varphi_\cdot$ „homotópia erejéig egyértelmű".

3) A két megfeleltetés egymás inverze, és a megfeleltetések additívak.

Biz.: 1) $f_\cdot : \mathcal{P}(M)_\cdot \to \mathcal{P}(M')_\cdot$ esetén legyen

$$f = H_0(f_\cdot) : H_0(\mathcal{P}(M)_\cdot) = M \longrightarrow H_0(\mathcal{P}(M')_\cdot) = M'.$$

Ha $f_\cdot \sim g_\cdot$, akkor $H_0(f_\cdot) = H_0(g_\cdot)$.

2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_1 & \to & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \to & 0 \\ & & \vdots & & \downarrow \exists \varphi_0 & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \to & K_1' & \to & P_0' & \xrightarrow{p_0'} & M' & \to & 0 \end{array}$$

$\exists \varphi_0$, mivel P_0 projektív

Továbbá $\varphi_0(K_1) \subseteq K_1'$, mivel

$$p_0' \varphi_0(K_1) = \varphi p_0(K_1) = \varphi(0) = 0$$

Így $\exists\ \varphi_0|_{K_1} : K_1 \to K_1'$

Ismételjük most az eljárást $M \xrightarrow{\varphi} M'$ helyett

$K_1 \xrightarrow{\varphi_0|_{K_1}} K_1'$-re.

$\varphi_\cdot$ a φ felemeltje.

Az világos, hogy a $\varphi_\cdot$-nek az 1)-es pontban φ fog megfelelni.

3) Az kell még, hogy bármely két fölemelés homotóp egymással. Ez ekvivalens azzal, hogy a 0 leképezés bármely fölemeltje 0-homotóp. Ehhez tekintsük:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(M)^*_\cdot : \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dl, dashed, "s_1"'] & P_0 \arrow[r, "\tilde{p}_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] \arrow[dl, dashed, "s_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\mathcal{P}(M')^*_\cdot : \cdots \arrow[r] & P_2' \arrow[r, "p_2'"] & P_1' \arrow[r, "p_1'"] & P_0' \arrow[r, "\tilde{p}_0'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt $\operatorname{Im}\varphi_0 \subseteq \operatorname{Ker}\tilde{p}_0' = \operatorname{Im} p_1'$, hiszen $\tilde{p}_0'\varphi_0 = 0\,\tilde{p}_0$.

Így: $\exists\, s_0 : P_0 \to P_1'$ (a P_0 projektivitása miatt),

melyre: $\varphi_0 = p_1' s_0 \quad (= p_1' s_0 + 0\, p_0)$

(Itt: $0 = s_{-1}$)

Tekintsük most a $\varphi_1 - s_0 p_1 : P_1 \to P_1'$ függvényt.

Itt, $\operatorname{Im}(\varphi_1 - s_0 p_1) \subseteq \operatorname{Ker} p_1' = \operatorname{Im} p_2'$, ugyanis:

$$p_1'(\varphi_1 - s_0 p_1) = p_1'\varphi_1 - \underbrace{p_1' s_0}_{\varphi_0} p_1 = p_1'\varphi_1 - \varphi_0 p_1 = 0$$

a kommutativitás miatt.

Ez azt jelenti, hogy P_1 projektivitása miatt

$\exists\, s_1 : P_1 \to P_2'$, melyre: $p_2' s_1 = \varphi_1 - s_0 p_1$, azaz:

$$\varphi_1 = p_2' s_1 + s_0 p_1$$

Az eljárást folytatva kapjuk, hogy $\varphi_\cdot \sim 0$.

Azaz tetszőleges $\varphi : M \to M'$ bármely két fölemelése homotóp.

Vagyis: $\varphi_\cdot \rightsquigarrow H_0(\varphi_\cdot) \rightsquigarrow H_0(\varphi_\cdot)$. esetén:

$\varphi_\cdot \sim H_0(\varphi_\cdot)$.

Vagyis valóban egy bijekciót kapunk $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ és $\mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathcal{P}(M_\cdot), \mathcal{P}(M'_\cdot))$ között.

1.22. Következmény: Ha $\mathcal{P}_1(M)_\cdot$ és $\mathcal{P}_2(M)_\cdot$ két projektív feloldása M-nek, akkor $\mathcal{P}_1(M)$ és $\mathcal{P}_2(M)$ homotopikusan ekvivalensek.

Biz.: Legyen $f_\cdot : \mathcal{P}_1(M)_\cdot \longrightarrow \mathcal{P}_2(M)_\cdot$ az 1_M egyik fölemeltje, és $g_\cdot : \mathcal{P}_2(M)_\cdot \longrightarrow \mathcal{P}_1(M)_\cdot$ az 1_M egyik fölemeltje.

Ekkor $g_\cdot f_\cdot$ és $f_\cdot g_\cdot$ is az 1_M fölemeltjei,

tehát: $g_\cdot f_\cdot \sim 1_{\mathcal{P}_1(M)_\cdot}$ és $f_\cdot g_\cdot \sim 1_{\mathcal{P}_2(M)_\cdot}$.

1.23. Megjegyzés: Azt láttuk be, hogy az $M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ hozzárendelés egy funktor: $\mathcal{P}: R\text{-Mod} \longrightarrow K(R)$, és az a funktor hűséges és teljes, azaz $\forall\, M, M' \in R\text{-Mod}$ esetén $\mathcal{P}: \mathrm{Hom}_R(M, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(R)}(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(M'))$ izomorfizmus.

1.24. Állítás: Legyen $F: R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ additív funktor, $\mathcal{P}(M)_\cdot$ és $\mathcal{P}(M')_\cdot$ projektív feloldásai az $M, M' \in R\text{-Mod}$ modulusoknak, és legyen $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. Jelölje $f_\cdot$ az f fölemeltjét $\mathcal{P}(M)_\cdot$-ról $\mathcal{P}(M')_\cdot$-re. Ekkor:

(1) rögzített M mellett $H_n(F(\mathcal{P}(M)_\cdot))$ független a konkrét feloldás választásától;

(2) $H_n(F(f_\cdot))$ csak f-től függ, a konkrét fölemeléstől nem.

Biz.: F additív, így F (azaz $\bar{F}: C(R) \longrightarrow C(S)$) homotóp komplexust homotóp komplexusba visz, így ezek homológiái megegyeznek.

Ez azt jelenti, hogy $H_n(F(\mathcal{P}(M).))$ független a komplexustól. Hasonlóképpen, f különböző fölemeltjei homotópok, így homotópok lesznek az F-képeik is, ezért azonos leképezést indukálnak a homológiákon.

1.25. Def. (és állítás) Legyen $F: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ additív funktor, $M \in R\text{-Mod}$, $\mathcal{P}(M).$ egy projektív feloldása M-nek, $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$, $f.$ az f fölemeltje $\mathcal{P}(M)$-re.

Definiáljuk az F balderivált funktorait:

$$(L_n F)(M) = H_n(F(\mathcal{P}(M)))$$

$$(L_n F)(f) = H_n(F(f.))$$

Tehát:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \\ M' \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathcal{P}(M).: \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ \mathcal{P}(M').: \cdots \arrow[r] & P_n' \arrow[r] & P_{n-1}' \end{tikzcd} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} F(\mathcal{P}(M)).: \cdots \arrow[r] & F(P_n) \arrow[r] \arrow[d, "F(f_n)"] & F(P_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "F(f_{n-1})"] & \cdots \\ F(\mathcal{P}(M')).: \cdots \arrow[r] & F(P_n') \arrow[r] & F(P_{n-1}') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} H_n(F(\mathcal{P}(M).)) \arrow[d, "H_n(F(f_n))"] \\ H_n(F(\mathcal{P}(M').)) \end{tikzcd}$$

Azt, hogy ez funktor, az alábbiból láthatjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} L_nF: \; M & \overset{}{\underset{\mathcal{P}}{\longmapsto}} & \mathcal{P}(M). & \underset{F}{\longmapsto} & F(\mathcal{P}(M).) & \underset{H_n}{\longmapsto} & H_n(F(\mathcal{P}(M).)) \\ \Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap \\ R\text{-Mod} & \longrightarrow & K(R) & \longrightarrow & K(S) & \longrightarrow & S\text{-Mod} \end{array}$$

Tehát: $L_nF = H_n \circ \tilde{F} \circ \mathcal{P}$

Ha injektív kofeloldásból indulunk ki: az R^nF jobbderivált funktort kapjuk: $R^nF = H^n \circ \tilde{F} \circ \mathcal{J}$

Ha G kontravariáns: L_nG-hez használjuk az injektív kofeloldást és R^nG-hez a projektív feloldást.

1.26. Példa $N \in R\text{-Mod}$ esetén legyen $G = \mathrm{Hom}_R(-, N)$.

Ekkor $R^nG(M) := \mathrm{Ext}^n_R(M, N)$.

Ezt tehát a következőképpen kapjuk:

$$M \rightsquigarrow \mathcal{P}(M)_\bullet \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}(M)_\bullet, N) \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}(M)_\bullet, N))$$

1.27. Állítás Ha F jobbegzakt, akkor $L_0F \simeq F$. Ha G balegzakt, akkor $R^0F \simeq G$.

Biz. (vázlat) Csak az $L_0F \simeq F$:

Tekintsük az alábbit: $\to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt

$\Big\downarrow$ F jobbegzakt

$\to F(P_1) \to F(P_0) \to F(M) \to 0$ egzakt

$$\Rightarrow \quad F(P_1) \to F(P_0) \to 0 \to \cdots$$

0-adik homológiája $\cong F(M)$.

Hf. a természetesség igazolása.

1.28. Köv: $\mathrm{Ext}^0_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

1.29. Állítás: Legyen $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$. Ekkor $K(R)$-be
(„Patkó-lemma")

$\exists \; 0 \to \mathcal{P}(M')_\cdot \xrightarrow{f_\cdot} \mathcal{P}(M)_\cdot \xrightarrow{g_\cdot} \mathcal{P}(M'')_\cdot \to 0$ egzakt, és itt $f_\cdot$, $g_\cdot$ az f, ill. a g fölemeltje. (Azaz a $\mathcal{P}$ funktor „egzakt")

Biz.: Elegendő $C(R)$-be megmutatni, hogy $\exists$ ilyen feloldások. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}(M')_\cdot$ és $\mathcal{P}(M'')_\cdot$ szabadon választható, és $\mathcal{P}(M)_\cdot = \mathcal{P}(M')_\cdot \oplus \mathcal{P}(M'')_\cdot$.

$$\begin{tikzcd}
 & P_1' \arrow[d] & & P_1'' \arrow[d] & \\
 & P_0' \arrow[d] & & P_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ (Patkó)

Ekkor tekintsük az alábbi diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1' \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & K_1'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}_0'"] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}_0''"] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Itt P_0'' projektív $\Rightarrow \exists \varphi : P_0'' \to M$, hogy $g \circ \varphi = \tilde{p}_0''$.

Legyen: $P_0' \oplus P_0'' \xrightarrow{f\tilde{p}_0' \oplus \varphi = \tilde{p}_0} M$

Ezzel a diagram kommutatív.

Legyenek K_1', K_1, K_1'' a függőleges morfizmusok magjai.

A kígyó-lemma miatt: $0 \to K_1' \to K_1 \to K_1'' \to 0$ egzakt, és $\tilde{p}_0$ szürjektív. Indukcióval folytatjuk.

1.30. Állítás: T. föl: $0 \to P_\cdot' \to P_\cdot \to P_\cdot'' \to 0$ egzakt $C(\mathcal{P}(R))$-ben vagy $K(\mathcal{P}(R))$-ben, és legyen $F: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ additív funktor. Ekkor: $0 \to FP_\cdot' \to FP_\cdot \to FP_\cdot'' \to 0$ is egzakt.

Biz. Mivel a kiinduló komplexusokban projektívek vannak, ezért az egyes oszlopokban levő egzakt sorozatok fölhasadók. De ha F additív, akkor a fölhasadó egzaktot fölhasadó egzaktba viszi (gyakorlat) $\Rightarrow$ (fölhasadó) egzakt lesz a mondott sorozat.

1.31. Következmény (A derivált funktorok hosszú egzakt sorozata)

Ha $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ egzakt R-Modban, és $F: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ additív funktor, akkor $\exists\ \partial_n$ összekötő homomorfizmusok, melyekkel egzakt az alábbi sorozat:

$$\dots \to (L_{n+1}F)(M'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} (L_nF)(M') \xrightarrow{(L_nF)(f)} (L_nF)(M) \xrightarrow{(L_nF)(g)} (L_nF)(M'') \to$$

$$\xrightarrow{\partial_n} (L_{n-1}F)(M')$$

Biz. A patkó-lemma miatt

$$0 \to \mathcal{P}(M')_\cdot \to \mathcal{P}(M)_\cdot \to \mathcal{P}(M'')_\cdot \to 0 \quad \text{egzakt,}$$

és az 1.27. állítás miatt

$$0 \to F(\mathcal{P}(M')_\cdot) \to F(\mathcal{P}(M)_\cdot) \to F(\mathcal{P}(M'')_\cdot) \to 0 \quad \text{egzakt.}$$

Az állítás így következik a homológiákra vonatkozó hosszú egzakt sorozat létezéséből (1.16. Tétel).

1.32. Következmény: 1) F jobbegzakt $\Longleftrightarrow$ $F \simeq L_0 F$

F balegzakt $\Longleftrightarrow$ $F \simeq R^0 F$

2) Legyen F jobbegzakt. Ekkor: F egzakt $\Longleftrightarrow$ $L_1 F = 0$.

F balegzakt. Ekkor F egzakt $\Longleftrightarrow$ $R^1 F = 0$.

1.33. Állítás (A derivált funktorok axiomatikus jellemzése)

Legyen F jobbegzakt, additív funktor, $\{\Phi_n \mid n \geq 0\}$ pedig egy additív funktorcsalád, melyre:

1) $\Phi_0 \simeq F$

2) $\Phi_n(P) = 0$ $\forall n > 0$-ra és $\forall$ projektív P-re.

3) Ha $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ egzakt, akkor $\exists \Delta_n$:

$$\cdots \to \Phi_{n+1}(M'') \xrightarrow{\Delta_{n+1}} \Phi_n(M') \xrightarrow{\Phi_n(f)} \Phi_n(M) \xrightarrow{\Phi_n(g)} \Phi_n(M'') \to$$
$$\xrightarrow{\Delta_n} \Phi_{n-1}(M') \to \cdots \quad \text{egzakt.}$$

Ekkor: $\Phi_n \simeq (L_n F)$

Biz. (Vázlat, MacLane: Homology)

$L_n F$-re teljesül 1) és 3); 2) pedig triviális, mert

P projektív $\Rightarrow$ $\exists$ $0 \to P \to P \to 0$ proj. feloldása

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}(P)_\cdot : \cdots \to 0 \to P \to 0 \to \cdots$

$\Rightarrow$ $F(\mathcal{P}(P)_\cdot) : \to 0 \to FP \to 0 \to \cdots$

$\Rightarrow$ $H_n(F(\mathcal{P}(P)_\cdot)) = 0$, ha $n > 0$.

Megfordítva, t. fel. Φ_n-re teljesül 1)–3).

Legyen $M \in R\text{-Mod}$ adott, és vegyük a projektív feloldásnak az elejét: $0 \to K_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \to 0$ egzakt, P_0 projektív. Ekkor 2) és 3) alapján:

$$
\begin{tikzcd}
\Phi_1(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Phi_1(M) \arrow[r] & \Phi_0(K) \arrow[r, "\Phi_0(\alpha)"] \arrow[dd, phantom, "\cong"] & \Phi_0(P) \arrow[r] \arrow[dd, phantom, "\cong"] & \Phi_0(M) \arrow[r] \arrow[dd, phantom, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[d, equal] & & & & & \\
L_1F(P) \arrow[r] & L_1F(M) \arrow[r] & F(K) \arrow[r, "F_0(\alpha)"] & F(P) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Ekkor $\Phi_1(M) \cong \operatorname{Ker} \Phi_0(\alpha) \cong \operatorname{Ker} F_0(\alpha) \cong L_1F(M)$

Továbbá indukcióval, mivel $n \geq 1$-re:

$$
\begin{tikzcd}
\Phi_{n+1}(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Phi_{n+1}(M) \arrow[r, "\sim"] & \Phi_n(K) \arrow[r] \arrow[dd, phantom, "\cong"] & \Phi_n(P) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[d, equal] & & & 0 \\
(L_{n+1}F)(P) \arrow[r] & (L_{n+1}F)(M) \arrow[r, "\sim"] & (L_nF)(K) \arrow[r] & L_n(P) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$