Legyen $M \in R$-Mod adott, és vegyük a projektív fölöldásnak az elejét: $0 \to K_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \to 0$ egzakt, P_0 projektív. Ekkor 2) és 3) alapján:

$$\begin{tikzcd}
\Phi_1(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Phi_1(M) \arrow[r] & \Phi_0(K) \arrow[r, "\Phi_0(\alpha)"] \arrow[dd, "\cong"] & \Phi_0(P) \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"] & \Phi_0(M) \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[d, equal] & & & & & \\
L_1F(P) \arrow[r] & L_1F(M) \arrow[r] & F(K) \arrow[r, "F_0(\alpha)"] & F(P) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ekkor $\Phi_1(M) \cong \mathrm{Ker}\,\Phi_0(\alpha) \cong \mathrm{Ker}\,F_0(\alpha) \cong L_1F(M)$

Tovább indukcióval, mivel $n \geq 1$-re:

$$\begin{tikzcd}
\Phi_{n+1}(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Phi_{n+1}(M) \arrow[r, "\sim"] & \Phi_n(K) \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"] & \Phi_n(P) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[d, equal] & & & 0 \arrow[d, equal] \\
(L_{n+1}F)(P) \arrow[r] & (L_{n+1}F)(M) \arrow[r, "\sim"] & (L_nF)(K) \arrow[r] & L_n(P)
\end{tikzcd}$$

(2) Az Ext és a Tor funktorok. Modulusok bővítései és az Ext. A Yoneda-szorzat

2.1. Jelölés: Tekintsük a $h_M = \mathrm{Hom}_R(M,-)$ és a $h^\circ_N = \mathrm{Hom}_R(-,N)$ ko-, ill. kontravariáns funktorokat; mindkettő balegzakt. Képezhetjük a jobb-derivált funktorokat, $R^n h_M$ és $R^n h^\circ_N$. $R^n h_M$-et injektív kofölöldásból, $R^n h^\circ_N$-ot pedig projektív fölöldásból kapjuk, azaz:

$R^n h_M(X)$ konstrukciója: $\mathcal{I}(X)$: $0 \to (X \to) I_0 \to I_1 \to \cdots$ $/ h_M(-)$

$$0 \to (\mathrm{Hom}(M,X) \to) \mathrm{Hom}(M,I_0) \to \mathrm{Hom}(M,I_1) \to \cdots$$

Az itteni kohomológiák adják az $R^n h_M(X)$-et.

$R^n h_N^0(Y)$ konstrukciója: $\mathcal{P}(Y)_\bullet : \cdots \to P_1 \to P_0 (\to Y) \to 0 \quad / \mathrm{Hom}_R(-,N)$

$$0 \to \big(\mathrm{Hom}(Y,N) \to\big)\, \mathrm{Hom}(P_0,N) \to \mathrm{Hom}(P_1,N) \to \cdots$$

Az itteni kohomológiák adják az $R^n h_N^0(Y)$-t.

2.2. Tétel $R^n h_M(N) \cong R^n h_N^0(M)$; ezt fogjuk $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$-nel jelölni.

Biz. A derivált funktorok axiomatikus jellemzését szeretnénk használni. Megmutatjuk, hogy $R^n h_N^0(M)$ funktoriálisan függ N-től is: $\Phi_n(N) = R^n h_N^0(M)$, ha M rögzített modulus.

$\Phi_n(N)$ konstrukciója tehát:

$$\mathcal{P}(M)_\bullet : \quad \to P_1 \to P_0 (\to M) \to 0 \qquad / \mathrm{Hom}_R(-,N)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$0 \to \big(\mathrm{Hom}(M,N) \to\big)\, \mathrm{Hom}(P_0,N) \to \mathrm{Hom}(P_1,N) \to \cdots,$$

majd vesszük a kohomológiákat.

Ha $\varphi : N \to L$ homomorfizmus, akkor kell egy $\Phi_n(\varphi)$ leképezés:

$$\exists \qquad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "h_M(\varphi)"'] & \mathrm{Hom}(P_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "h_{P_0}(\varphi)"'] & \mathrm{Hom}(P_1,N) \arrow[r] \arrow[d, "h_{P_1}(\varphi)"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_0,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_1,L) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} \qquad \#\,,$$

azaz a fenti diagram kommutatív, ugyanis:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "p_1"] & P_0 \arrow[r, "\tilde{p}_0"] \arrow[drr, dashed, "\varphi\psi\tilde{p}_0"'] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi\psi"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\
 & & & L
\end{tikzcd} \qquad \text{stb.}$$

Így tehát van egy leképezés a $h_N^0(\mathcal{P}(M)_\bullet)$ és $h_L^0(\mathcal{P}(M)_\bullet)$ között, ami indukál egy leképezést a kohomológiákon:

$$\Phi_n(N) \xrightarrow{\Phi_n(\varphi)} \Phi_n(L)$$

és így Φ_n funktor (kovariáns)

Nyilván: 1) $\Phi_0(N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N) = h_M(N)$

2) $\Phi_n(N) = 0$, ha $n>0$ és N injektív, ugyanis ebben az esetben a $h_N^\circ(\mathcal{P}(M)^*_\cdot)$ sorozat egzakt, hiszen $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ egzakt, és $\mathcal{P}(M)^*$ egzakt. Így $h_N^\circ(\mathcal{P}(M)_\cdot)$ magasabb dimenziós kohomológiái eltűnnek.

3) Megmutatjuk, hogy a Φ_n-ekre teljesül a harmadik tulajdonság is az axiomatikus jellemzésből.

Legyen $\mathcal{P}(M)_\cdot$ egy rögzített projektív feloldása M-nek.

Legyen $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ egzakt, és alkalmazzuk rá a $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}(M)_\cdot, -)$ funktort, így kapunk egy

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}(M)_\cdot, N') \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}(M)_\cdot, N) \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{P}(M)_\cdot, N'') \to 0$$

sorozatot $K(R)$-ben, és ez egzakt marad, mert $\mathcal{P}(M)_\cdot$ minden eleme projektív.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(P_0, N') & \to & \mathrm{Hom}(P_1, N') & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(P_0, N) & \to & \mathrm{Hom}(P_1, N) & \to & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(P_0, N'') & \to & \mathrm{Hom}(P_1, N'') & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(A függőleges sorozatok egzaktak, mert P_i projektív.)

Így kapunk a kohomológiákban egy hosszú egzakt sorozatot:

$$\cdots \Phi_n(N') \to \Phi_n(N) \to \Phi_n(N'') \xrightarrow{\delta_n} \Phi_{n+1}(N') \to$$

A jobbderivált funktorok axiomatikus jellemzése miatt így:

$$\phi_n(N) \simeq R^n h_M(N)$$
$$\wr\wr$$
$$R_n h_N^{\circ}(M)$$

(Így tehát az $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ kétféleképpen is meghatározható.)

2.3. Def. és tétel: $t_M: M\otimes_R -$, $\bar{t}_N: -\otimes_R N$ esetén:

$$L_n t_M(N) \simeq L_n \bar{t}_N(M),$$ és ezt $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ jelöli.

2.4. Köv. Legyen $0 \to {}_R X \to {}_R Y \to {}_R Z \to 0$ egzakt. Ekkor

1) tetsz. ${}_R M$-re:
$$0 \to \mathrm{Hom}(M,X) \to \mathrm{Hom}(M,Y) \to \mathrm{Hom}(M,Z) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(M,X) \to \mathrm{Ext}^1(M,Y) \to \mathrm{Ext}^1(M,Z) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^2(M,X) \to \dots$$ egzakt.

2) tetsz. ${}_R N$-re:
$$0 \to \mathrm{Hom}(Z,N) \to \mathrm{Hom}(Y,N) \to \mathrm{Hom}(X,N) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(Z,N) \to \mathrm{Ext}^1(Y,N) \to \mathrm{Ext}^1(X,N) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^2(Z,N) \to \dots$$ egzakt.

3) tetsz. M_R-re:
$$\dots \to \mathrm{Tor}^2(M,Z) \to$$
$$\to \mathrm{Tor}^1(M,X) \to \mathrm{Tor}^1(M,Y) \to \mathrm{Tor}^1(M,Z) \to$$
$$\to M\otimes X \to M\otimes Y \to M\otimes Z \to 0$$

Megj.: Ha a kiinduló egzakt sorozat jobbmodulusokból áll, akkor a $-\otimes_R M$ és $\mathrm{Tor}_n^R(-,M)$ funktorokkal kapjuk a fenti egzakt sorozatot.

- -

Most megadjuk az Ext^n funktorok egy másik interpretációját.

2.5. Def.: $M, N \in R\text{-Mod}$ esetén: M-nek N-nel vett <u>bővítése</u> alatt egy $\mathcal{E}: 0 \to N \xrightarrow{\alpha} K \to M \to 0$ egzakt sorozatot értünk.

Bővítések közötti morfizmus: (ν, κ, μ):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \\
\mathcal{E}': & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutatív

Bővítések <u>ekvivalenciája</u>:

$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$, ha $\exists\ (1_N, \kappa, 1_M)$ morfizmus.

(Ilyenkor — az 5-lemma miatt — κ izomorfizmus.)

2.6. Megjegyzés Előfordulhat, hogy $\mathcal{E}: 0 \to N \to K \to M \to 0$ és $\mathcal{E}': 0 \to N \to K' \to M \to 0$ adottak, sőt $K \cong K'$, de $\mathcal{E} \not\equiv \mathcal{E}'$. Pl.:

$$a \longmapsto 3b \qquad b \longmapsto c$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_9^+ = \langle b \rangle \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 = \langle c \rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{E}': & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_3^+ = \langle a \rangle \arrow[r] & \mathbb{Z}_9^+ = \langle b \rangle \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 = \langle c \rangle \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$a \longmapsto 6b \qquad b \longmapsto c$$

Itt $\nexists\ \kappa: \mathbb{Z}_9^+ \to \mathbb{Z}_9^+$, ami kommutatívvá tenné a fenti diagramot.

(Gyak.-on: ha $\exists \kappa$, akkor $\exists \nu \Longleftrightarrow \exists \mu$).

2.7. Def.: Jelölje $Ex(M,N)$ az M-nek N-nel vett bővítési ekvivalenciaosztályainak halmazát. (Ez halmaz!)

Ezt bifunktorrá tesszük:

1) $\mu: M' \to M$, $\xi \in Ex(M,N)$ esetén $\xi\mu \in Ex(M',N)$:

$$\begin{tikzcd}
\xi\mu: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & \tilde{K} \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\kappa"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
\xi: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"'] & K \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ahol

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K} \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\kappa"'] & M' \arrow[d, "\mu"] \\
K \arrow[r, "\beta"'] & M
\end{tikzcd}$$

az

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[d, "\mu"] \\
K \arrow[r, "\beta"'] & M
\end{tikzcd}$$

pullbackje. (L. gyak.)

Kiszámolható (gyak.), hogy $Ker\ \beta' \cong Ker\ \beta$, azaz a megfelelő kívánt izomorfizmus van.

2) Hasonlóan csinálva, ha: $\nu: N \to N'$, $\xi \in Ex(M,N)$, akkor $\nu\xi \in Ex(M,N')$:

$$\begin{tikzcd}
\xi: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\kappa"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\nu\xi: & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\alpha'"'] & \bar{K} \arrow[r, "\beta'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & K \arrow[d, "\kappa"] \\
N' \arrow[r, "\alpha'"'] & \bar{K}
\end{tikzcd}$$

az

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & K \\
N'
\end{tikzcd}$$

pushoutja.

Itt is kiszámolható, hogy $Coker\ \alpha \cong Coker\ \alpha'$, így a két utolsó tagot azonosítjuk.

Ellenőrizni kell (de ez világos), hogy a megfeleltetés ekvivalenciaosztályok között van értelmezve, azaz:

$$\mu : M' \longrightarrow M \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ex}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ex}(M',N) \\ \Psi & & \Psi \\ \mathcal{E} & \longmapsto & \mathcal{E}\mu \end{array}$$

$$\nu : N \longrightarrow N' \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ex}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ex}(M,N') \\ \Psi & & \\ \mathcal{E} & \longmapsto & \nu\mathcal{E} \end{array}$$

Feltehetjük kell még:

2.8. Állítás: 1) Ha $\exists\ \mathcal{E}' \xrightarrow{(1_N, \kappa', \mu)} \mathcal{E}$ morfizmus, akkor $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}\mu$

2) Ha $\exists\ \mathcal{E} \xrightarrow{\nu, \kappa', 1_M} \mathcal{E}''$ morfizmus, akkor $\mathcal{E}'' \equiv \nu\mathcal{E}$

Azaz: a pullback és a pushout diagramokból kapott sorozatokat az „alakjuk" már egyértelműen meghatározza.

Biz: Csak az 1)-et igazoljuk.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}': & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K' \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend right, "\kappa'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{E}\mu: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\kappa"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt a pullback tulajdonsága miatt $\exists\ K' \longrightarrow \tilde{K}$, ami kommutatívvá teszi a diagramot. Ha megvan $K' \longrightarrow \tilde{K}$ és $M = M$, akkor $\exists\ N = N$ is (bizonyítandó!)

Ebből kijön, hogy $\mathrm{Ex}(-,-)$ funktor, azaz teljesül a kompozíció.

2.9. Állítás: Minden $\mathcal{E}' \xrightarrow{(\nu,\kappa,\mu)} \mathcal{E}$ morfizmus keresztülvezethető $\mathcal{E}\mu \equiv \nu\mathcal{E}'$-n.

Biz.:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}': & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend right, "\nu"'] & K' \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend right, "\kappa"'] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dd, bend right, "\mu"'] & 0 \\
\mathcal{E}\mu: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K} \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt a pullback tulajdonság miatt $\exists\, K' \to \tilde{K}$, és ekkor a megszorítás: $N' \to N$ is, ami nyilván ν-vel egyező.

Mivel „duálisan" $\mathcal{E}\mu$ megfelel $\nu\mathcal{E}'$-nek, az előbbi állítás miatt

$\nu\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}\mu$.

2.10. Állítás: $(\nu\mathcal{E})\mu \equiv \nu(\mathcal{E}\mu)$

Biz.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\mu: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K} \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\nu\mathcal{E}: & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & \check{K} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Így van egy $\mathcal{E}\mu \xrightarrow{(\nu,\kappa,\mu)} \nu\mathcal{E}$ leképezésünk.

Az előző állítás szerint az keresztülvezethető

$\nu(\mathcal{E}\mu) \equiv (\nu\mathcal{E})\mu$-n.

2.11. Megjegyzés: 1) A fenti „asszociativitás" tkp. azt biztosítja, hogy $Ex(M,N)$ bifunktor.

2) Eddig azt kaptuk, hogy $Ex(M,N) \in SET$. Most Abel-csoporttá tesszük.

2.12. Def: Definiáljuk az alábbi homomorfizmusokat:

$\Delta_M : M \longrightarrow M \oplus M, \quad m \longmapsto (m,m)$ diagonális leképezés

$\nabla_N : N \oplus N \longrightarrow N, \quad (n_1,n_2) \longmapsto n_1 + n_2$ kodiagonális leképezés.

2.13. Def. $\mathcal{E}_i \in Ex(M_i, N_i) \Rightarrow \oplus \mathcal{E}_i \in Ex(\oplus M_i, \oplus N_i)$ a természetes módon.

2.14. Def (Bővítések Baer-összege). $\xi_1, \xi_2 \in Ex(M,N) \Rightarrow$
$\xi_1 + \xi_2$ a Baer-összegük, $\xi_1 + \xi_2 \in Ex(M,N)$:

$$\xi_1 + \xi_2 = \nabla_N (\xi_1 \oplus \xi_2)\Delta_M$$

ahol:

$$\begin{tikzcd}
(\xi_1\oplus\xi_2)\Delta_M: & 0 \arrow[r] & N\oplus N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_M"] \arrow[dd, equal, bend left] & 0 \\
\xi_1\oplus\xi_2: & 0 \arrow[r] & N\oplus N \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_N"] & K_1\oplus K_2 \arrow[r] \arrow[d] & M\oplus M \arrow[r] & 0 \\
\nabla_N(\xi_1\oplus\xi_2)\Delta_M: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \bar{K} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

2.15. Tétel $Ex(M,N)$ Abel-csoport a Baer-összegre nézve; 0-eleme a felhasadó egzakt sorozatok osztálya, ξ inverze $(-1)_N \xi$; $Ex(-,-)$ additív bifunktor AB-be, ahol:

$$\nu(\xi_1+\xi_2) = \nu\xi_1 + \nu\xi_2; \quad (\xi_1+\xi_2)\mu = \xi_1\mu + \xi_2\mu; \quad (*)$$

$$(\nu_1+\nu_2)\xi = \nu_1\xi + \nu_2\xi; \quad \xi(\mu_1+\mu_2) = \xi\mu_1 + \xi\mu_2 \quad (**)$$

Biz. Először $(*)$-ot bizonyítjuk:

$$\nu(\xi_1+\xi_2) = \nu(\nabla_N(\xi_1\oplus\xi_2)\Delta_M) = \nabla_{N'}(\nu\oplus\nu)\,\xi_1\oplus\xi_2\,\Delta_M =$$
$$= \nabla_{N'}(\nu\xi_1\oplus\nu\xi_2)\Delta_M = \nu\xi_1 + \nu\xi_2$$

A másik disztributivitás hasonlóan jön ki.

Ez azt jelenti, hogy az $\xi \longmapsto \nu\xi$ és $\xi \longmapsto \xi\mu$ hozzárendelések valóban additívak.

$(**)$-hoz:

$$(\nu_1+\nu_2)\xi = \nabla_{N'}(\nu_1\oplus\nu_2)\Delta_N\xi = \nabla_{N'}(\nu_1\oplus\nu_2)(\xi\oplus\xi)\Delta_M, \quad \text{mivel}$$

$\xi \xrightarrow{\Delta} \xi\oplus\xi$ miatt $\Delta_N\xi = \xi\Delta_M$,

másrészt $\nabla_{N'}(\nu_1\oplus\nu_2)\,\xi\oplus\xi\,\Delta_M = \nu_1\xi + \nu_2\xi$, definíció szerint.

A másik disztributivitás hasonlóan jön ki.

Az összeadás asszociativitása:

$$(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)+\mathcal{E}_3=\nabla_N\big((\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)\oplus\mathcal{E}_3\big)\Delta_M=\nabla_N\big(\nabla_N(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2)\Delta_M\oplus\mathcal{E}_3\big)\Delta_M=$$

$$=\nabla_N(\nabla_N\oplus 1_N)\big((\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2)\oplus\mathcal{E}_3\big)(\Delta_M\oplus 1_M)\Delta_M=$$

$$=\nabla_N(1_N\oplus\nabla_N)\big(\mathcal{E}_1\oplus(\mathcal{E}_2\oplus\mathcal{E}_3)\big)(1_M\oplus\Delta_M)\Delta_M=\dots=\mathcal{E}_1+(\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_3)$$

Kommutativitás: hasonló módon.

A felhasadó egzakt sorozat a 0-elem:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0_N"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "(0,\beta)"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0_N\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N\oplus M \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ felhasadó

Így a felhasadó egzakt sorozat $0_N\mathcal{E}$ alakú, amiből az additivitás miatt következik, hogy ez a nullelem.

Az inverz hasonlóan adható.

<u>2.16. Állítás:</u> Az $\mathcal{E}: 0\to N\to K\to M\to 0$ bővítésnél egy $\nu: N\to N'$ leképezés pontosan akkor terjeszthető ki egy $\bar\nu: K\to N'$ leképezéssé, ha $\nu\mathcal{E}=0$, azaz $\nu\mathcal{E}$ felhasadó.

<u>Biz.</u> $\Leftarrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\nu\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & \tilde{K} \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\exists"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Így
$$\begin{tikzcd}
\bar\nu: K \arrow[d] \\
N' & \tilde{K} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$
jó kiterjesztése ν-nek.

$\Rightarrow$ Ha $\exists\ \bar\nu: K\to N'$ kiterjesztés:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & K \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\bar\nu"] \\
 & N' \arrow[r] \arrow[drr, bend right, equal] & \tilde{K} \arrow[dr, dashed, "\exists"] \\
 & & & N'
\end{tikzcd}$$

A pushout tulajdonság miatt $\exists\ \tilde{K}\to N'$, és így az $N'\to\tilde{K}$ beágyazás felhasadó.