2.17. Definíció: Legyen $\mathcal{E} \in \mathrm{Ex}(M,N)$, $\nu \in \mathrm{Hom}(N,N')$, $\mu \in \mathrm{Hom}(M',M)$. Vegyük az alábbi hozzárendeléseket:

$$\mathcal{E}_*: \mathrm{Hom}(M',M) \longrightarrow \mathrm{Ex}(M',N), \qquad \mu \longmapsto \mathcal{E}\mu$$

$$\mathcal{E}^*: \mathrm{Hom}(N,N') \longrightarrow \mathrm{Ex}(M,N'), \qquad \nu \longmapsto \nu\mathcal{E}.$$

2.18. Tétel: Legyen $\mathcal{E}: 0 \to N \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} M \to 0$ bővítés. Ekkor tetszőleges N'-re egzakt lesz az alábbi sorozat:

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N') \to \mathrm{Hom}(K,N') \to \mathrm{Hom}(N,N') \xrightarrow{\mathcal{E}^*} \mathrm{Ex}(M,N') \xrightarrow{\cdot\beta}$$
$$\to \mathrm{Ex}(K,N') \xrightarrow{\cdot\alpha} \mathrm{Ex}(N,N').$$

Hasonlóan egzakt lesz a duálisan képezhető sorozat is tetszőleges M'-re az $\mathcal{E}_*$ leképezéssel.

Biz. Az elején tudjuk az egzaktságot. $\mathrm{Hom}(N,N')$-nél az egzaktság a 2.16-os állítás következménye.

A féligegzaktság $\mathrm{Ex}(K,N')$-nél világos, mivel

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ex}(M,N') & \xrightarrow{\cdot\beta} & \mathrm{Ex}(K,N') & \xrightarrow{\cdot\alpha} & \mathrm{Ex}(N,N') \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\mathcal{E} & \longmapsto & \mathcal{E}\beta & \longmapsto & \mathcal{E}\beta\alpha = \mathcal{E}0 = 0
\end{array}$$

A féligegzaktság $\mathrm{Ex}(M,N')$-nél:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(N,N') & \xrightarrow{\mathcal{E}^*} & \mathrm{Ex}(M,N') & \xrightarrow{\cdot\beta} & \mathrm{Ex}(K,N') \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\nu & \longmapsto & \nu\mathcal{E} & \longmapsto & (\nu\mathcal{E})\beta
\end{array}$$

Itt: $(\nu\mathcal{E})\beta = \nu(\mathcal{E}\beta)$, és $\mathcal{E}\beta$ a 2.16. állítás miatt fölhasadó, hiszen

$$\begin{tikzcd}
 & & & K \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_K"'] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists\, \mathrm{id}_K$ fölemeltje β-nak.

Az egzaktság $\mathrm{Ex}(M,N')$-nél: tegyük föl: $\mathcal{E}' \in \mathrm{Ex}(M,N')$, és $\mathcal{E}'\beta = 0$. Az kellene, hogy $\exists\, \nu \in \mathrm{Hom}(N,N')$, melyre

$$\mathcal{E}^*(\nu) = \nu\mathcal{E} = \mathcal{E}'!$$

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathcal{E}: & 0 & \to & N & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \vdots & & \downarrow \varphi & & & & \\
\mathcal{E}\beta: & 0 & \to & N' & \to & \tilde{K} & \to & K & \to & 0 \\
 & & & \exists\nu \downarrow \| & & \kappa \searrow \ \downarrow \rho & & \downarrow \beta & & \\
\mathcal{E}': & 0 & \to & N' & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$\nu = \kappa|_N$

$\mathcal{E}\beta = 0$ miatt $\exists \varphi: K \longrightarrow \tilde{K}$, és így $\exists\, \mathcal{E} \xrightarrow{(\nu,\kappa,1_M)} \mathcal{E}'$, ahol $\kappa = \rho\varphi$ és $\nu = \kappa|_N$.

De tudjuk, hogy ez a diagram meghatározza $\nu\mathcal{E}$-t $\Rightarrow$ $\mathcal{E}' = \nu\mathcal{E}$, ahogy kívántuk.

Így most már csak $Ex(K, N')$-nél kell nézni az egyenlőséget.

Legyen $\mathcal{E}'' \in Ex(K, N')$, melyre $\mathcal{E}''\alpha = 0$. Ekkor:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathcal{E}''\alpha: & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & \tilde{K} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow & \exists\varphi \quad \exists\rho & \downarrow \alpha & & \\
\mathcal{E}'': & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \\
\mathcal{E}': & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & K''/\mathrm{Im}\,\rho & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$\exists \rho: N \to K''$, ami felemeltje α-nak.

Ellenőrizhető, hogy $\mathcal{E}'$ konstrukciója valóban jó, azaz $\exists\, K''/\mathrm{Im}\,\rho \longrightarrow M$ leképezés, és a megadott sorozat egzakt.

Így: $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'\beta$.

<u>2.19. Megjegyzés:</u> Az $\mathcal{E}^*$ és $\mathcal{E}_*$ leképezések természetesek.

<u>2.20. Állítás:</u> $Ex(M,N) \cong Ext^1_R(M,N)$.

<u>Biz.</u> Vegyünk egy $\mathcal{E}: 0 \to K \to P \to M \to 0$ egzakt sorozatot, ahol P projektív. Ekkor:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & \| \\
0 \to & Hom(M,N) & \to & Hom(P,N) & \to & Hom(K,N) & \xrightarrow{\partial} & Ext^1_R(M,N) & \to & Ext^1_R(P,N) & \\
 & \| & & \| & & \| & & & & & \\
0 \to & Hom(M,N) & \to & Hom(P,N) & \to & Hom(K,N) & \xrightarrow{\mathcal{E}^*} & Ex(M,N) & \to & Ex(P,N) & \\
 & & & & & & & & & \| & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Itt $Ext^1_R(P,N)$-ről tudjuk, hogy 0, de $Ex(P,N)$ is 0, mivel $\forall\, P$ projektívre $\forall\, N$-nel vett bővítés felhasad.

Így $Ext^1_R(M,N) \cong Ex(M,N)$.

2.21. Definíció: $\mathcal{E}$ n-hosszúságú egzakt sorozat M és N között, ha

$$\mathcal{E}: 0 \to N \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0 \qquad \text{(M és N szerepe ne számít!)}$$

Legyenek $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ n hosszúságú sorozatok. Ebben az esetben azt mondjuk: $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ ekvivalensek $(\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}')$, ha $\exists$ $\mathcal{E} \xrightarrow{\Gamma_0} \mathcal{E}_1 \xleftarrow{\Gamma_1} \mathcal{E}_2 \to \cdots \xleftarrow{\Gamma_n} \mathcal{E}'$ morfizmussorozat, ahol $\Gamma_i = (1_N, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, 1_M)$.

2.22. Definíció: Ha $\mathcal{E}: 0 \to N \to X_{k-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$ és

$\mathcal{E}': 0 \to M \to Y_{l-1} \to \cdots \to Y_0 \to K \to 0$, akkor definiáljuk az

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{E}': 0 \to N \to X_{k-1} \to \cdots \to X_0 \to Y_{l-1} \to \cdots \to Y_0 \to K$$

Yoneda-szorzatot. Könnyen látható, hogy a Yoneda-szorzás asszociatív, és kompatibilis a hosszú egzakt sorozatok ekvivalenciájával.

2.23. Állítás Minden n hosszúságú egzakt sorozat n darab rövid egzakt sorozat Yoneda-szorzataként írható föl. Legyen most $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_0$ és $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_{n-1} \circ \cdots \circ \mathcal{E}'_0$ egy-egy ilyen fölbontás. Ekkor $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$ $\iff$ $\mathcal{E}$ fölbontásából megkaphatjuk $\mathcal{E}'$ fölbontását az alábbi lépések ismételt alkalmazásával:

(i) $\mathcal{E}_i \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{E}}_i$, ahol $\mathcal{E}_i \equiv \tilde{\mathcal{E}}_i$

(ii) $\tilde{\mathcal{E}}_i \alpha \circ \mathcal{E}_{i+1} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{E}}_i \circ \alpha \mathcal{E}_{i+1}$

(iii) $\mathcal{E}_i \circ \alpha \tilde{\mathcal{E}}_{i+1} \rightsquigarrow \mathcal{E}_i \alpha \circ \tilde{\mathcal{E}}_{i+1}$

Biz. Szokásos.

2.24. Definíció: $\operatorname{Ext}^n(M, N)$ legyen az M és N közötti n hosszúságú ekvivalenciaosztályok halmaza (?)

2.25. Definíció Ha $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{E}_0 \in Ex^n(M,N)$, és $\mu : M' \to M$, $\nu : N \to N'$, akkor legyen $\mathcal{E}\mu = \mathcal{E}_{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{E}_0\mu$ és $\nu\mathcal{E} = \nu\mathcal{E}_{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{E}_0$.
(Meggondolandó, hogy ez jól van definiálva az ekvivalenciaosztályokon.)

2.26. Állítás: Ex^n bifunktor SET-be.

Biz. Csak az nem világos, hogy miért lesz $Ex^n(M,N)$ halmaz, hiszen ha $0 \to M \to X_{n-1} \to \dots \to X_1 \to X_0 \to N \to 0$ egzakt, akkor tetszőleges Y-ra $0 \to M \to X_{n-1} \to \dots X_1 \oplus Y \to X_0 \oplus Y \to N \to 0$ is egzakt lesz, így akármilyen nagy számosságú modulusok is előfordulhatnak a hosszú sorozat közepén.
Megmutatjuk, hogy minden sorozat ekvivalens egy olyannal, ahol a közepén levő modulusok számossága egy fix (M-től és N-től függő) számosság alatt marad. Ehhez vegyünk egy $\mathcal{E}$ hosszú sorozatot, valamint vegyük M-nek egy projektív feloldását:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{E}}: 0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\nu"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\nu_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\nu_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A projektivitás miatt $\exists\, \nu_0, \dots \nu_{n-1}, \nu$
Tekintsük most a $\nu\tilde{\mathcal{E}} = \nu(\tilde{\mathcal{E}}_{n-1} \circ \dots \circ \tilde{\mathcal{E}}_0)$ sorozatot:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{E}}: 0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\nu}_{n-1}"] \arrow[dd, dashed, bend right, "\nu_{n-1}"'] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\nu\tilde{\mathcal{E}}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{P}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists \mu_{n-1}"'] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\nu_{n-2}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & L_{n-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & L_{n-1} \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De tudjuk, hogy rövid egzaktnál $\tilde{\mathcal{E}}_0 \xrightarrow{(\nu, \nu_{n-1}, \mu)} \mathcal{E}_0$ keresztülvezethető $\nu\tilde{\mathcal{E}}_0$-on.

A $\nu\tilde{\xi}$ sorozatból tehát van egy $(1_N, \mu_{n-1}, \nu_{n-2}, \dots \nu_0, 1_M)$ morfizmus ξ-be, tehát $\nu\tilde{\xi} \equiv \xi$.

Mivel $\nu\tilde{\xi}$-ben a modulusok számossága rögzítve van, ha rögzítjük a projektív feloldást (itt $|\tilde{P}_{n-1}| = |N| + |K_{n-1}|$), ezért az egyes tagok triviális izomorfizmustól eltekintve csak halmaznyi sok ekvivalenciaosztályunk lehet.

2.27. Következmény: $\forall \xi \in Ex^n(M,N)$ ekvivalens egy olyannal, ahol $n-1$ középső tag projektív:

$$0 \to N \to Y_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M$$

2.28. Def: $Ex^n(M,N)$-en is definiálható a Baer-összeg; ezzel $Ex^n(M,N)$ additív bifunktor lesz AB-be.

2.29. Tétel: $\forall M, N$-re: $Ex^n(M,N) \simeq Ext^n(M,N)$; ez izomorfizmus természetes.

Biz. Csak a megfeleltetést adjuk meg:

$\xi \in Ex^n(M,N)$-hez rendeljük hozzá (mint az előbb) id_M egy fölemeltjét $P_\cdot$-re, az M egy rögzített projektív feloldására:

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "0"] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, dashed, "g_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, dashed, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt $g_n \in Hom(P_n, N) \in Ker\, Hom(\partial_{n+1}, 1_N)$-nek, mivel $g_n \partial_{n+1} = 0$

Másrészt tetszőleges másik fölemelés — mint azt a projektív föloldások közötti fölemeléseknél láttuk — most is lánchomotóp egymással, így $g_n - g_n' = \Delta_{n-1}\partial_n$, azaz a különbségük $\in \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}(\partial_n, N)$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{E} \longmapsto [g_n]$ egy $\mathrm{Ext}^n(M,N) \longmapsto H^n(\mathrm{Hom}(P_\cdot,N))$ megfeleltetést ad.

HF. megadni a megfeleltetés inverzét.

<u>2.30. Megjegyzés</u> Legyen A véges dimenziós algebra, ${}_AS = A/\mathrm{rad}\,A$ féligegyszerű. A Yoneda-szorzással képezhetjük az $A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^i_A(S,S)$ <u>bővítés-algebrát</u>. Ilyen módon egy „dualitást" kapunk A és A^* között; érdekesek azok az esetek, amikor $A^* = A$ (önduális eset), ill. amikor $A^{**} \cong A$. (Ez elvezet a <u>Koszul-algebrák</u> témakörébe.)

③ Homologikus dimenziók

<u>3.1. Def.</u> $M \in R\text{-Mod}$; $\mathrm{pd}\, M$ = M <u>projektív dimenziója</u> $= n \in \mathbb{N}$, ha

$\exists\ 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ projektív föloldás,

de ennél rövidebb nem létezik, azaz tetszőleges proj. föloldásban a korábbi magok nem projektívek. Ha $\nexists$ véges proj. föloldás, akkor $\mathrm{pd}\, M = \infty$.

<u>3.2. Def</u> $M \in R\text{-Mod}$; $\mathrm{id}\, M$ = M <u>injektív dimenziója</u> $= n \in \mathbb{N}$, ha

$\exists\ 0 \to N \to I_0 \to \cdots \to I_n \to 0$ injektív föloldás, de ennél rövidebb nem létezik. Ha $\nexists$ véges inj. föloldás, akkor $\mathrm{id} = \infty$.

<u>3.3. Áll:</u> $\mathrm{pd}\, M = 0 \iff M$ projektív, $\mathrm{id}\, M = 0 \iff M$ injektív.