Másrészt tetszőleges másik fölemelés – mint azt a projektív föloldások közötti fölemelésnél láttuk – most is lánchomotóp egymással, így $g_n - g_n' = s_{n-1}\partial_n$, azaz a különbségük $\in$ $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}(\partial_n, N)$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{E} \mapsto [g_n]$ egy $\mathrm{Ext}^n(M,N) \mapsto H^n(\mathrm{Hom}(P_\cdot,N))$ megfeleltetést ad.

Hf. megadni a megfeleltetés inverzét.

<u>2.30. Megjegyzés</u> Legyen A véges dimenziós algebra, ${}_A S = A/\mathrm{rad}\,A$ féligegyszerű. A Yoneda-szorzással képezhetjük az $A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^i_A(S,S)$ <u>bővítés-algebrát</u>. Ilyen módon egy „dualitást" kapunk A és A^* között; érdekesek azok az esetek, amikor $A^* = A$ (önduális eset), ill. amikor $A^{**} \cong A$. (Ez elvezet a <u>Koszul-algebrák</u> témakörébe.)

3 <u>Homologikus dimenziók</u>

<u>3.1. Def.</u> $M \in R\text{-Mod}$; $\mathrm{pd}\,M$ = M <u>projektív dimenziója</u> $= n \in \mathbb{N}$, ha

$\exists\ 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \dots \to P_0 \to M \to 0$ projektív föloldás,

de ennél rövidebb nem létezik, azaz tetszőleges proj. föloldásban a korábbi magok nem projektívek. Ha $\nexists$ véges proj. föloldás, akkor $\mathrm{pd}\,M = \infty$.

<u>3.2. Def</u> $M \in R\text{-Mod}$; $\mathrm{id}\,M$ = M <u>injektív dimenziója</u> $= n \in \mathbb{N}$, ha

$\exists\ 0 \to N \to I_0 \to \dots \to I_n \to 0$ injektív föloldás, de ennél rövidebb nem létezik. Ha $\nexists$ véges inj. föloldás, akkor $\mathrm{id} = \infty$.

<u>3.3. Áll:</u> $\mathrm{pd}\,M = 0 \iff M$ projektív, $\mathrm{id}\,M = 0 \iff M$ injektív.

3.4. Példa: a) $\mathbb{Z}_2 \in AB$; $\quad 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \Rightarrow$

$\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_2 \le 1$; $\quad \ne 0$, mert nem projektív.

b) $R = \mathbb{Z}_4$; $\quad M = (2)$. Ekkor: $0 \to (2) \to \mathbb{Z}_4 \to (2) \to 0$ nem felhasadó, így $(2) \cong \mathbb{Z}_2$ nem projektív. Így egy végtelen proj. feloldást kapunk, ahol egyik mag se projektív. Ebből már következni fog, hogy $\mathrm{pd}\, M = \infty$.

3.5. Áll.: Ekvivalensek M-re:

(i) $\mathrm{pd}\, M = n$

(ii) $\exists N$: $\mathrm{Ext}^n(M,N) \ne 0$, és $\forall N$-re $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N) = 0$.

(iii) $\forall i \le n$ $\exists N_i$: $\mathrm{Ext}^i(M,N_i) \ne 0$ és $\forall m > n$ $\mathrm{Ext}^m(M,N) = 0$.

Biz. (i) $\Rightarrow$ (iii) $\quad 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$.

Ekkor $\mathrm{Ext}^m(M,-) = 0$ $\forall m > n$-re, hiszen itt

$\mathrm{Hom}(P_m, N) = \mathrm{Hom}(0,N) = 0$, így az m-edik homológia 0.

Másrészt mivel ennél rövidebb feloldás nem létezik, ezért:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots & & \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & K_{n-1} \arrow[ur] & & K_{n-2} & & K_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

és ill. $K_1, \dots, K_{n-1}$ nem projektív.

De gyakorlaton szerepelt, hogy a $0 \to K_i \to P_{i-1} \to K_{i-1} \to 0$ sorozatból (az $M = K_0$ jelöléssel):

$$\mathrm{Ext}^i(M,N) \cong \mathrm{Ext}^{i-1}(K_1,N) \cong \dots \cong \mathrm{Ext}^1(K_{i-1},N).$$

Mivel K_{i-1} nem projektív ($i \le n$-re), ezért $\exists N_i$:

$\mathrm{Ext}^1(K_{i-1},N_i) \ne 0$, tehát $\mathrm{Ext}^i(M,N_i) \ne 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) triv.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Mivel $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,-) = 0$, ezért az előzőek szerint

K_n projektív lesz a projektív feloldásban, ezért pd $M \leq n$.
Másrészt pd $M = i < n$ esetén $\mathrm{Ext}^n(M,N)=0$ lenne $\forall N$-re.
Így pd $M = n$.

3.6. Áll.: N-re ekvivalensek:

(i) id $N = n$

(ii) $\exists N$ $\mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0$, és $\forall M$-re $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N)=0$

(iii) $\forall i \leq n$-re $\exists M_i$: $\mathrm{Ext}^i(M_i,N) \neq 0$, és $\forall m > n$-re $\forall M$-re: $\mathrm{Ext}^m(M,N)=0$

Biz. Duálisa az előzőnek.

3.7. Következmény Tetszőleges M tetszőleges projektív feloldásában a magok mindig ugyanott projektívek. (Hasonlóképpen az injektív feloldásokról)

Biz. Az $\mathrm{Ext}^i(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^1(K_{i-1},N)$ feltétel miatt
K_{i-1} projektív $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^i(M,-)=0$.

3.8. Állítás. Legyen $0 \to N \to K \to M$ egzakt.

(i) Ha pd N, pd K, pd M közül kettő véges, akkor véges a harmadik is.

(ii) Ha pd $K >$ pd N, akkor: pd $K =$ pd M

(iii) Ha pd $K <$ pd N, akkor pd $M =$ pd $N + 1$

(iv) Ha pd $K =$ pd N, akkor pd $M \leq$ pd $N + 1$

(v) pd $K \leq \max\{\text{pd } N, \text{pd } M\}$.

Biz. A Hom és az Ext hosszú egzakt sorozatból.

3.9. Def. $l\,gl\,dim\,R = \sup\{\text{pd } M \mid M \in R\text{-Mod}\} = \sup\{\text{id } N \mid N \in R\text{-Mod}\}$

Ez a gyűrű (bal) globális dimenziója.
Hasonlóan definiálható $r\,gl\,dim\,R$ is.

3.10. Áll: A globális dimenzió definíciója korrekt: a két szupr. egyenlő.

Biz. Mindkét szám egyenlő az alábbival:

$$\sup\{n \mid \exists M, N \in R\text{-Mod}: \operatorname{Ext}^n_R(M,N) \neq 0\}$$

3.11. Példa: 1) R féligegyszerű $\iff$ $\operatorname{lgl\,dim} R = 0 \iff \operatorname{rgl\,dim} R = 0$.

2) R bal örökletes $\iff$ $\operatorname{lgl\,dim} R \leq 1$

3.12. Állítás (Auslander) $\operatorname{lgl\,dim} R = \sup\{\operatorname{pd} R/I \mid {}_R I \leq {}_R R\}$, azaz a projektív dimenziók supremumát elég a ciklikus modulusokon nézni.

Biz. Ha a fenti supremum ∞, akkor nincs mit bizonyítani. Így föltehetjük, hogy a ciklikus modulusok projektív dimenziójának a supremuma $= n < \infty$. Meg kell mutatnunk, hogy $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(-,-) = 0$. Legyen M, N tetszőleges, és számoljuk ki $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(M,N)$-et. Ehhez vegyük az N egy injektív feloldását:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & I_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & I_{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & & C_1 \arrow[ur] & & C_n \arrow[ur] & & C_{n+1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

A szokásos módon:
$$\operatorname{Ext}^{n+1}_R(M,N) \cong \operatorname{Ext}^n_R(M, C_1) \cong \dots \cong \operatorname{Ext}^1_R(M, C_n)$$

$M = R/I$-re $(I \leq {}_R R)$: $\operatorname{Ext}^1_R(R/I, C_n) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, N) = 0$, hiszen $\operatorname{pd} R/I \leq n$. Ez viszont egy korábbi állítás miatt azt jelenti, hogy $\forall f: I \to C_n$ kiterjeszthető $\bar{f}: R \to C_n$ leképezéssé, hiszen a pushout-sorozat felhasadó $(\in \operatorname{Ext}^1_R(R/I, N) = 0)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[r] \arrow[d] & R/I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
f\mathcal{E}: 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \tilde{N} \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy C_n injektív, és így tetszőleges M-re: $\mathrm{Ext}^1_R(M, C_n) = 0$. Ebből $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) = 0$ $\forall M, N$.

3.13. Állítás: Ha R Artin-gyűrű, akkor $l\,gl\,dim\, R = \max\{\mathrm{pd}\, S \mid S \text{ egyszerű}\}$.

Biz. A feltételből adódik $l(R/I) < \infty$ $\forall$ ciklikus modulusra, azaz ciklikus modulusoknak van véges kompozíciólánca.

A kompozícióhosszra vonatkozó indukcióval kapjuk, a 3.8.(v) adódik, hogy $l(M) < \infty \Rightarrow \mathrm{pd}\, M \leq \max\{\mathrm{pd}\, S \mid S \text{ egyszerű}\}$.

3.14. Példák: a) ${}_AA = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\2&&4\\&3&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$

Így $\mathrm{pd}\, 1 = 3$, $\mathrm{pd}\, 2 = 4$, $\mathrm{pd}\, 3 = 5$, $\mathrm{pd}\, 4 = 6 \Rightarrow l\,gl\,dim\, A = 6$

$$0 \to \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&3&\\2&&4\\&3&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}&3&\\2&&4\\&3&\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\2&&4\\&3&\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 0 \\
 & & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}2&4\\1&3\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

stb.

b) Ha Γ véges gráf, $K\Gamma$ véges dimenziós $\Rightarrow A = K\Gamma$ örökletes.

Biz. Legyen e_i az i-hez tartozó idempotens, $i \xrightarrow{\alpha_1} j_1, \ \dots, \ i \xrightarrow{\alpha_k} j_k$

Ekkor $\mathrm{rad}\, e_iA = \alpha_1 A \oplus \alpha_2 A \oplus \cdots \oplus \alpha_k A$, és ill.

$\alpha_l A \cong e_{j_l} A$ projektív $\forall\, l$-re.

Így $S(i) = e_iA / \mathrm{rad}\, e_iA$ projektív feloldása:

$$0 \to \mathrm{rad}\, e_iA \to e_iA \to S(i) \to 0$$

Vagyis $\mathrm{pd}\, S(i) \leq 1$ $\forall\, i$-re.

c) $l\,gl\,dim\, \mathbb{Z}_4 = \infty$, mivel $\mathrm{pd}\, \mathbb{Z}_2 = \infty$.

d) R komm., nullosztómentes gyűrű. R örökletes $\Longleftrightarrow$ R Dedekind-gyűrű.

3.15. Megjegyzés: 1) $\forall\ 1 \leq m, n \leq \infty\ \exists\ R_{m,n}$, melyre:

$$\mathrm{lgldim}\, R_{m,n} = m, \quad \mathrm{rgldim}\, R_{m,n} = n. \quad \text{(Jategaonkar 1967)}$$

2) $\dim_K A < \infty \Rightarrow \mathrm{lgldim}\, A = \mathrm{rgldim}\, A \quad (=: \mathrm{gldim}\, A)$

(Biz. gyakorlaton)

Általában: R jobb- és bal-Noether $\Rightarrow \mathrm{lgldim}\, R = \mathrm{rgldim}\, R$

3.16. Definíció Legyen R tetszőleges gyűrű.

$$\mathrm{pFindim}\, R = \sup\{\mathrm{pd}\, M \mid M \in R\text{-Mod},\ \mathrm{pd}\, M < \infty\}$$

$$\mathrm{iFindim}\, R = \sup\{\mathrm{id}\, N \mid N \in R\text{-Mod},\ \mathrm{id}\, N < \infty\}$$

Tkp. bal-, ill. jobb oldali finitisztikus dimenzióról kellene beszélnünk, sőt: megszoríthatnánk a definíciót csak véges dimenziós modulusokra ($\mathrm{pfindim}\, R$, $\mathrm{ifindim}\, R$)

3.17. Sejtés: A véges dimenziós algebra $\Rightarrow \mathrm{pFindim}\, A < \infty$.

Ismeretes: i) $\exists$ szemiprimér gyűrű ($R/J(R)$ féligegyszerű, $J(R)$ nilpotens), amire nem igaz a FDS. (Kirkman–Kuzmanovich)

ii) $\mathrm{rad}^3 A = 0 \Rightarrow$ igaz rá a FDS (Green–Zimmermann-Huisgen)

iii) A monomiális algebra ($A = K\Gamma/I$, I-t utak generálják)

$\Rightarrow$ igaz rá a FDS (Green–Kirkman–Kuzmanovich)