Gyűrűkonstrukciók és a globális dimenzió kapcsolata

3.18. Példák: 1) Részgyűrűre: $R \leq S$.

a) K test: $\text{gl dim } K = 0$ (hiszen féligegyszerű)

$K[x]$ nullosztómentes főideálgyűrű: $\text{gl dim } K[x] = 1$

(nem féligegyszerű, de öröklődő: minden ideál főideál, izomorf $K[x]$-szel $\Rightarrow$ öröklődő)

Tehát: $\text{gl dim } K = 0 < \text{gl dim } K[x] = 1$

b) Ugyanakkor: $\text{gl dim } \mathbb{Z} = 1 > \text{gl dim } \mathbb{Q} = 0$, pedig $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$.

Látni fogjuk: $\text{gl dim } K[x_1, \dots x_n] = n > \text{gl dim } K(x_1, \dots x_n) = 0$

hányadostest

2) Homomorf képre: $R \twoheadrightarrow S$.

a) $\text{gl dim } \mathbb{Z} = 1 > \text{gl dim } \mathbb{Z}_2 = 0$,

b) $\text{gl dim } \mathbb{Z} = 1 < \text{gl dim } \mathbb{Z}_4 = \infty$

(láttuk: $\mathbb{Z}_2$-nek $\nexists$ véges projektív feloldása)

3) Mátrixgyűrűre:

$\text{gl dim } R = \text{gl dim } M_n(R)$, hiszen Morita-ekvivalensek, és ekvivalenciánál a globális dimenzió megőrződik.

3.19. Megjegyzés: Milyen kapcsolat van az egyes moduluskategóriák között?

1) $R \leq S$: $\Rightarrow$ $\text{Mod } S \subseteq \text{Mod } R$, hiszen $\forall$ S-modulus R-modulus is egyben

2) $R \twoheadrightarrow S$ (vagy elég: $R \to S$) $\Rightarrow$ $\text{Mod } S \subseteq \text{Mod } R$, hiszen ha

$\lambda: S \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$ adja meg az S-modulusstruktúrát,
akkor $R \twoheadrightarrow S \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} M$ is megad egy R-modulusstruktúrát.

3) $R \leq S$: minden R-modulushoz hozzárendelhetünk egy S-modulust:

$${}_RM \rightsquigarrow S \otimes_R M \in S\text{-Mod}$$

A tenzorszorzással definiálhatjuk az M S-együtthatós változatát. (Tehát pl. Abel-csoportokból kaphatunk $\mathbb{Q}$-vektortereket)

4) $eRe \leq R$; $e^2 = e \in R$:

Láttuk az előbb: minden R-modulus eRe-modulus is.

Másik lehetőség: ${}_RM \rightsquigarrow eM \in eRe\text{-Mod}$

↑ ez lény. a $\mathrm{Hom}_R(Re, -)$ funktor)

Vigyázni kell: a projektív feloldások nem egyeznek

<u>Polinomgyűrűk globális dimenziója</u>: $R \leq R[x]$, és $R \cong R[x]/(x)$

<u>3.20. Tétel</u>: Legyen $x \in R$ centrális, nem nullosztó, jelölje $\bar{R} = R/xR$. Ekkor: $\forall\, 0 \neq M \in \bar{R}\text{-Mod}$ egyúttal R-modulus is, és $\mathrm{pd}_{\bar{R}} M < \infty$ esetén

$$\mathrm{pd}_R M = \mathrm{pd}_{\bar{R}} M + 1.$$

($xR \triangleleft R$, hiszen x centrális)

<u>Megjegyzés</u>: Gondolhatunk az $R = \bar{R}[x]$ esetre, $x \in \bar{R}[x]$ az ismeretlen, vagy a 3.18/2. Példában a $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ esetre $x = 2$-vel.

Legyen $\mathrm{pd}_{\bar R} M = n < \infty$. n-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk, hogy $\mathrm{pd}_R M = n+1$.

(Megj: Általánosabb formában, azaz akkor ha nem $R \twoheadrightarrow S$ van adva, hanem csak $R \to S$, akkor is igaz az $\mathrm{Mod}\, S \subseteq \mathrm{Mod}\, R$, de ilyenkor: $\mathrm{pd}_R M \le \mathrm{pd}_S M + \mathrm{pd}_R S$ mondható csak; az állítás példájában: $\mathrm{pd}_R \bar R = 1$, hiszen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & xR \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & R \arrow[r] & R/xR \arrow[r] & 0 \\
& R & \text{proj.} \arrow[u] \arrow[ul] & \text{nem projektív, mert pl. } x \text{ annullálja.} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Ebből tehát csak $\mathrm{pd}_{\bar R} M \le n+1$ jönne csak ki.)

1. lépés: T. föl: $\mathrm{pd}_{\bar R} M = 0$, azaz $n = 0$. Ilyenkor ${}_{\bar R}M$ projektív.

De: $0 \to {}_R xR \to {}_R R \to {}_R \bar R \to 0$ projektív feloldás R-Modban, hiszen $xR \cong R$ (mert x nem nullosztó, x centrális, így $R \to xR$, $r \mapsto xr$ modulushomomorfizmus, injektív). Ugyanakkor $\bar R$ nem projektív R fölött, mert $x \cdot \bar R = 0$, holott x nem nullosztó R-ben. Így $\mathrm{pd}_R M \le \mathrm{pd}_R \bar R = 1$. De M se projektív, mert $xM = 0$ (hiszen $M \in \bar R$-Mod). Tehát

$\mathrm{pd}_R M = 1$.

2. (indukciós) lépés T. föl: $\mathrm{pd}_{\bar R} M = n > 0$, és t. föl, hogy kisebb pd-re már tudjuk az állítást.

Vegyük M-nek az $\bar{R}$ fölötti projektív feloldását (pontosabban az első lépést).

$$0 \xrightarrow[\bar{R}]{} K \xrightarrow[\bar{R}]{} P \xrightarrow[\bar{R}]{} M \longrightarrow 0, \qquad (*)$$

ahol ${}_{\bar{R}}P$ projektív. Ekkor $pd_{\bar{R}} K = n-1$

$\overset{\text{indukció}}{\Longrightarrow}$ $pd_R K = n$;

Azt is tudjuk: $pd_R P = 1$ (az 1. lépésből).

a) Ha $n > 1$, akkor a 3.8. Állítás alapján ($(*) \subseteq R\text{-Mod}$) (ahol rövid egzakt sorozat tagjainak a proj. dimenzióját hasonlítottuk össze): $pd_R M = pd_R K + 1 = n+1$.

b) Marad az $n = 1$ eset.

A 3.8. alapján itt is tudjuk, hogy $pd_R M \leq 2$, de előfordulhatna, hogy $pd_R M = 1$ v. 0.

Rögtön látjuk – mint korábban –, hogy $pd_R M = 0$ nem lehet, mivel $xM = 0$ ($M \in \bar{R}\text{-Mod}$), ugyanakkor x nem annullál egyetlen R-projektívet se.

Marad tehát az az eset, amikor: $pd_{\bar{R}} M = pd_R M = 1$.

Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges:

$pd_{\bar{R}} M \leq 1$, $pd_R M = 1$ esetén $pd_{\bar{R}} M = 0$.

Vegyük M-nek egy szabad R-feloldását:

$$0 \to {}_R K \to {}_R F \to {}_R M \to 0 \qquad (**)$$

Mivel most $\mathrm{pd}_R M = 1$, ezért K R-projektív.

Itt egyúttal $M \in \bar{R}$-Mod; és $xM = 0$ miatt $xF \to 0$,

azaz az egzaktság miatt $xF \subseteq K$.

(**)-ből kapjuk egy szabad $\bar{R}$-feloldást.

$$0 \to {}_{\bar{R}} K/xF \to {}_{\bar{R}} F/xF \to {}_{\bar{R}} M \to 0$$

Láttuk: $xF \subseteq K$

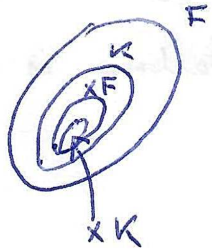
$F = \oplus R$

$F/xF = \oplus R/xR = \oplus \bar{R}$, tehát szabad $\bar{R}$ fölött.

De a feltevés szerint $\mathrm{pd}_{\bar{R}} M \leq 1 \Rightarrow$

K/xF projektív $\bar{R}$-modulus.

De ekkor,



$$0 \to xF/xK \to K/xK \to K/xF \to 0$$

egzakt.

Viszont: K/xF projektív $\Rightarrow$ felhasad $\bar{R}$ fölött

$\Rightarrow$ $xF/xK \overset{\oplus}{\leq} K/xK$

Itt viszont K R-projektív $\Rightarrow$ K/xK $\bar{R}$-projektív.

Ezért xF/xK is $\bar{R}$-projektív.

De $xF \cong F$, $xK \cong K$ és $xF/xK \cong F/K \cong {}_R M$

$\Rightarrow$ $\bar{R}$ fölött is: M $\bar{R}$-projektív ↯ (ellentmondás). □

3.21. Következmény $x \in R$ centrális, nem nullosztó $\Rightarrow$

$\mathrm{lgl\,dim}\, R/xR = n < \infty$ esetén $\mathrm{lgl\,dim}\, R \geq n+1$.

Spec. $\mathrm{lgl\,dim}\, R < \infty$ esetén $\mathrm{lgl\,dim}\, R[x] \geq \mathrm{lgl\,dim}\, R + 1$.

3.22. Tétel: R tetszőleges gyűrű; $R[x]$ a fölötte vett polinomgyűrű. Ekkor:

$$\mathrm{lgl\,dim}\, R[x] = \mathrm{lgl\,dim}\, R + 1.$$

(És itt: $\infty = \infty + 1$.)

Megjegyzés: Az előbb beláttuk, hogy azoknak az $R[x]$-modulusoknak, amelyeket x annullál, az $R[x]$ fölötti projektív dimenziója 1-gyel nagyobb, mint az R fölötti projektív dimenziója.
De mi van a többivel?
(Vegyük észre, amit az elején állítottunk:
R része is és faktora is $R[x]$-nek.)

Biz. 1) Legyen $M \in R\text{-Mod}$.

Ekkor: (*) $_RM$ projektív $\Leftrightarrow$ $_{R[x]}R[x] \otimes_R M = M[x]$ projektív.

Megjegyzés: $_RM$ projektív $\Rightarrow$ $M \overset{\oplus}{\leq} \oplus R \Rightarrow$

$$_{R[x]}R[x] \otimes_R M \overset{\oplus}{\leq} \oplus\big(\underbrace{R[x] \otimes_R R}_{_{R[x]}R[x]}\big) = \oplus R[x]$$

Megfordítva: $_{R[x]}M[x]$ projektív $\Rightarrow$

$$_{R[x]}R[x] \otimes_R M \overset{\oplus}{\leq} \big(\oplus_{R[x]} R[x]\big) \Rightarrow$$

akkor direkt összeadandó R fölött is (itt most az $R \leq R[x]$-ből adódó R-struktúrát használjuk):

$${}_R R[x] \otimes_R M \overset{\oplus}{\leq} {}_R \left(\oplus R[x]\right)$$

Viszont ${}_R R[x] \cong (\overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} R)$, így:

$${}_R M \overset{\oplus}{\leq} (\overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} R) \otimes_R M = \overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} {}_R M \overset{\oplus}{\leq} {}_R\left(\oplus\left(\overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} R\right)\right) = \oplus {}_R R$$

$\Rightarrow {}_R M$ projektív.

Ezzel (*)-ot beláttuk.

2) Ebből következik, hogy $\mathrm{pd}_R M = \mathrm{pd}_{R[x]} M[x]$.

Ugyanis: $0 \to {}_R K \to {}_R F \to {}_R M \to 0$ szabad feloldás

$$\Downarrow$$

$$0 \to {}_{R[x]} K[x] \to {}_{R[x]} F[x] \to {}_{R[x]} M[x] \to 0$$

is szabad feloldás, hiszen $R[x] \otimes_R -$ egzakt (ugyanis $R[x]_R \cong (\oplus R)_R$ szabad, így projektív, tehát lapos), továbbá: ${}_R F = \oplus R \Rightarrow {}_{R[x]} F[x] = \oplus_{R[x]} R[x]$ szabad.

Mivel ${}_R K$ és ${}_{R[x]} K[x]$ egyszerre lesznek projektívek

$\Rightarrow \mathrm{pd}\, {}_R M = \mathrm{pd}_{R[x]} M[x]$.

(pd M nyilván számolható a szabad feloldás hosszából.)

Így ha $\mathrm{l\,gl\,dim}\, R = \infty \Rightarrow \mathrm{l\,gl\,dim}\, R[x] = \infty$.

(Vegyük észre, hogy az előző állításból ez még nem jött ki, hiszen ott a végtelen projektív dimenzió esetét nem tudtuk kezelni. Azt is vegyük észre, hogy az előbbi tételben $pd_R M$ és $pd_{R[x]} M$ volt összehasonlítva, itt viszont $pd_R M$ és $pd_{R[x]} M[x]$.)

3) A továbbiakban tegyük föl, hogy $\mathrm{lgldim}\, R = n < \infty$.
Az előző tétel szerint (3.21. Következmény):

$$\mathrm{lgldim}\, R[x] \geq n+1.$$

Most tehát csak az kell, hogy $\leq n+1$.
(Emlékeztető: $pd_R M = n \rightsquigarrow pd_{R[x]} M[x] = n$, de $pd_{R[x]} M = n+1$.)

Legyen most $M \in R[x]$-Mod. Ekkor $M \in R$-Mod is igaz.

Tek. az alábbi egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow {}_{R[x]}M[x] = R[x] \otimes_R M \xrightarrow{\varphi} {}_{R[x]}M \longrightarrow 0$$

ahol $\varphi = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes m_i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} x^i \cdot m_i$

Nyilván φ szürjektív, hiszen $1 \otimes m \xrightarrow{\varphi} m$.

Jelölje K a φ magját.

Láttuk: $pd_R M = pd_{R[x]} M[x]$, és mivel $\mathrm{lgldim}\, R = n$, ezért $pd_{R[x]} M[x] \leq n$.

Megmutatjuk: ${}_{R[x]}K \cong {}_{R[x]}M[x] \Rightarrow pd_{R[x]} K \leq n$

Ekkor: $0 \to K = M[x] \longrightarrow M[x] \longrightarrow {}_{R[x]}M \longrightarrow 0$, és itt az első két tag proj. dimenziója $\leq n \Longrightarrow pd_{R[x]} M \leq n+1$.

Most megadunk egy konkrét

$$\psi: R[x] \otimes_R M \longrightarrow K$$

izomorfizmust.

$$\psi: \sum_{i=0}^{k} x^i \otimes m_i \longmapsto \sum_{i=0}^{k+1} x^i \otimes (x m_i - m_{i-1}),$$

ahol $m_{-1} = 0$ és $m_{k+1} = 0$. Az kell, hogy:

(i) $\operatorname{Im}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi = K$; szubolds:

$$\varphi\left(x^0 \otimes (x m_0) + x^1 \otimes (x m_1 - m_0) + x^2 \otimes (x m_2 - m_1) + \dots + x^{k+1} \otimes (-m_k)\right)$$

$$= x m_0 + x^2 m_1 - x m_0 + x^3 m_2 - x^2 m_1 + \dots + x^{k+1} m_k - x^k m_{k-1} - x^{k+1} m_k = 0.$$

(ii) ψ szürjektív:

$K = \operatorname{Ker}\varphi$ elemeire:

$$\sum_{i=0}^{k} x^i \otimes m_i \in \operatorname{Ker}\varphi \iff m_0 + x m_1 + \dots + x^k m_k = 0$$

M-ben

$$\iff \underbrace{m_0 + x \cdot \Big(m_1 + x\big(m_2 + \dots + \underbrace{x\big(m_{k-1} + \underbrace{x m_k}_{\mu_{k-1}}\big)}_{\mu_{k-2}}\big)\Big)}_{\mu_0} = 0$$

$\iff \exists\, \mu_0, \mu_1, \dots \mu_{k-1}$:

$$m_0 = -x\mu_0$$
$$m_1 = \mu_0 - x\mu_1$$
$$\vdots$$
$$m_{k-1} = \mu_{k-2} - x\mu_{k-1}$$
$$m_k = \mu_{k-1}$$

Ebből a fölírásból látszik:

$$K = \{ 1 \otimes (-x\mu_0) + x \otimes (\mu_0 - x\mu_1) + \dots + x^{k-1} \otimes (\mu_{k-2} - x\mu_{k-1}) + x^k \mu_{k-1} \}$$

Ezek az elemek pedig pontosan az $\operatorname{Im} \Psi$ elemei.

(iii) Ψ injektivitása:

$$-xm_0 = m_0 - xm_1 = m_1 - xm_2 = \dots = +m_k = 0$$

Ebből rekurzíve kapjuk, hogy $m_k = m_{k-1} = \dots = m_0 = 0$,

tehát $\operatorname{Ker} \Psi = 0$.

3.23. Következmény: (Hilbert syzygy tétele)

K test $\Rightarrow$ gl dim $K[x_1, \dots x_n] = n$.

Biz. n-szer alkalmazzuk az előző tételt.