4. Gráfalgebrák, reprezentációk és az algebrák Gabriel-gráfja

A gráfalgebrák definícióját ismertnek vesszük: Γ gráf, irányított, $K\Gamma$ algebra: bázis: irányított utak; szorzás: utak egymás utáni írása vagy 0.

A továbbiakban föltesszük, hogy $\boxed{\Gamma = (V, E) \text{ véges}}$

Emlékeztetőül fölsorolunk néhány egyszerű tulajdonságot, melyeknek egy része csak feladat formájában szerepelt.

4.1. Áll. $K\Gamma$ összefüggő (azaz nem bontható nem triviális ideálok (gyűrű) direkt összegére $\iff$ Γ összefüggő.

Biz. Tegyük föl: $\Gamma = \Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2$ diszjunkt unió úgy, hogy nem megy él Γ-ban a Γ_1 és a Γ_2 csúcsai között. Ekkor $K\Gamma_1, K\Gamma_2 \triangleleft K\Gamma$ nyilván, és $K\Gamma = K\Gamma_1 \oplus K\Gamma_2$. Ha tehát Γ_1, Γ_2 nem üresek, akkor kaptunk egy nem triviális (ideál) fölbontást.

Megfordítva, legyen $K\Gamma = I_1 \oplus I_2$, ahol $I_1, I_2 \triangleleft K\Gamma$, és $I_i \neq 0$. Ekkor mindkét I_i egységelemes (az 1-nek az I_i-be eső komponense az), és így pl. I_1 egységeleme

e egy olyan centrális idempotenst ad $K\Gamma$-ben, amire $e \neq 0,1$.

Tudjuk, hogy Γ végessége miatt $1_{K\Gamma} = e_1 + \dots + e_n$, ahol e_i-k a csúcsokhoz tartozó idempotensek (0 hosszúságú utak).
Azt is tudjuk, hogy e_i-k primitív idempotensek, azaz nem bonthatók két ortogonális idempotens direkt összegére.

($K\Gamma$ véges dimenziós $\Rightarrow$ $e_i K\Gamma e_i = \mathrm{End}(e_i K\Gamma)$ lokális $\Rightarrow$
$e_i K\Gamma$ direkt felbonthatatlan $\Rightarrow$ e_i primitív)

Most megmutatjuk abban az esetben is, ha $K\Gamma$ végtelen dimenziós. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{End}(e_i K\Gamma) \cong e_i K\Gamma e_i$-ben nincs 0-n és e_i-n kívül más idempotens ($\Rightarrow$ $e_i K\Gamma$ direkt felbonthatatlan $\Rightarrow$ e_i primitív).

T. fel: $\varepsilon \in e_i K\Gamma e_i$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Ekkor:

$$\varepsilon = \lambda \cdot e_i + \gamma$$

ahol $\lambda \in K$, és γ legalább 1 hosszúságú, i-ből induló ciklusok lineáris kombinációja.

Ekkor: $0 = \varepsilon^2 - \varepsilon = (\lambda^2 - \lambda) e_i + (2\lambda - 1)\gamma + \gamma^2$

Az irányított utak lineáris függetlensége miatt $\lambda^2 = \lambda$ (azaz $\lambda = 0$ v. $\lambda = 1$), és $\gamma = 0$. (γ-ben szereplő maximális hosszúságú út négyzete szerepel γ^2-ben, és ez nem eshet ki.)

Ezzel tehát beláttuk, hogy e_i primitív rendre $K\Gamma$-ben.

Vegyük most az $I_1 \triangleleft K\Gamma$-hoz tartozó centrális idempotenst, e-t. Erre: $e = 1\cdot e\cdot 1 = \left(\sum_1^n e_i\right)\cdot e\cdot \sum_1^n e_i = \sum_1^n e_i e e_i$, ugyanis e centrális, és $e_ie_j = 0$, ha $i \neq j$.

Nyilván: $(e_i e e_i)^2 = e_i e e_i$, tehát az előbbiek szerint $e_i e e_i = 0$ v. $e_i e e_i = e_i$ $\forall i$-re.

Legyen most $J = \{i \mid e_i e e_i = e_i\}$, $H = \{i \mid e_i e e_i = 0\}$, tehát a csúcsok halmazát előállítottuk $J \dot\cup H$ diszjunkt unióként.

Ekkor: $i \in H$, $j \in J$ esetén: $e_i e = 0$, $e e_j = e_j$, továbbá $e_i K\Gamma e_j = e_i K\Gamma e\cdot e_j = e_i e K\Gamma e_j = 0$.

Hasonlóan megmutatható, hogy: $e_j K\Gamma e_i = 0$.

Ez azt jelenti, hogy Γ-ben nem megy él H-ból J-be, ill. J-ből H-ba. Ha tehát az $I_1 \oplus I_2 = K\Gamma$ felbontás nem triviális, akkor Γ nem összefüggő. □

4.2. Megjegyzés Érdekes általánosan is tudni: $e_iK\Gamma$, $K\Gamma e_i$ direkt felbonthatatlanok (akkor is, ha esetleg $K\Gamma$ nem véges dimenziós). Ha $\dim K\Gamma$ véges dimenziós, akkor $e_iK\Gamma$, ill. $K\Gamma e_i$ erősen felbonthatatlanok.

4.3. Áll. (A gráfalgebrák univerzális tulajdonsága)

Legyen Γ véges összefüggő gráf, A egy tetszőleges K-algebra. Tegyük föl, hogy $\Gamma=(V,E)$ esetén adva van egy

$\varphi_0 : V \longrightarrow A$ és

$\varphi_1 : E \longrightarrow A$ leképezés, melyekre:

(i) $1 = \sum_{i\in V} \varphi_0(i)$, $\varphi_0(i)^2 = \varphi_0(i)$, és $\varphi_0(i)\cdot\varphi_0(j) = 0$, ha $i \neq j$;

(ii) $\alpha \in E$, $i \xrightarrow{\alpha} j$ esetén $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(i)\varphi_1(\alpha)\cdot\varphi_0(j)$.

Ekkor $\exists!\ \varphi : K\Gamma \longrightarrow A$ algebrahomomorfizmus, melyre

$$\varphi(e_i) = \varphi_0(i), \quad \varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) \quad \forall i \in V,\ \alpha \in E\text{-re.}$$

Biz. Világos.

4.4. Def. Jelölje R_Γ az irányított élek által generált ideált. (Ezt nevezzük $K\Gamma$ felszorított radikáljának.)

$I \trianglelefteq K\Gamma$ megengedett ideál („admissible ideal"), ha $\exists\, m \geq 2$, hogy $R_\Gamma^m \subseteq I \subseteq R_\Gamma^2$.

(Megj. R_Γ nem feltétlenül $J(K\Gamma)$, lásd pl. a $K[x]$ esetét, ami kép.: $\Gamma : \cdot \circlearrowleft \alpha$ -ra $K\Gamma$.)

4.5. Áll. Legyen $I \lhd K\Gamma$ megengedett ideál. Ekkor:

(i) $K\Gamma/I$ véges dimenziós és bázisalgebra.

(ii) $\bar{e}_i = e_i + I$ primitív idempotens, $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \dots + \bar{e}_n$ primitív ortogonális idempotensek teljes rendszere

(iii) $K\Gamma/I$ összefüggő $\Longleftrightarrow$ Γ összefüggő

(iv) $J(K\Gamma/I) = R_\Gamma + I$.

Biz. Meggondolni.

4.6. Áll. $I \lhd K\Gamma$ megengedett ideál $\Longrightarrow$ I végesen generált mint ideál.

Biz. Elég megmutatni, hogy ${}_{K\Gamma}I$ végesen generált (ezért I végesen generált mint balideál). Ehhez tekintsük az alábbi egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow R_\Gamma^m \longrightarrow I \longrightarrow I/R_\Gamma^m \longrightarrow 0,$$

ahol R_Γ a felsorolt nyílideál, és $R_\Gamma^m \subseteq I$.

Nyilván R_Γ^m-et generálják (mint balideált is) az m hosszúságú utak, tehát végesen generált (Γ véges!)

Másrészt $I/R_\Gamma^m \lhd K\Gamma/R_\Gamma^m$, és az utóbbi algebra véges dimenziós. Tehát I/R_Γ^m is végesen generált.

Így ${}_{K\Gamma}I$ is végesen generált.

4.7. Köv. $I \triangleleft K\Gamma$ megengedett ideál $\Rightarrow$ $\exists$ véges sok reláció, hogy $I = (\varrho_1, \ldots, \varrho_t)$. (Itt most reláció alatt olyan lineáris kombinációt értünk $K\Gamma$-ban, melyben $\forall$ tag kezdő- és végpontja azonos.)

Biz. I végesen generált ideál; a véges generátorrendszer $\forall$ elemét szorozzuk e_i-vel balról és e_j-vel jobbról.

$\varrho \in I \Rightarrow \varrho_{ij} = e_i \varrho e_j \in I$, és $\varrho = \sum_{i,j} \varrho_{ij}$.

Itt ϱ_{ij} már reláció és nyilván ϱ-k ugyanazt az ideált generálják, mint a belőlük kapható ϱ_{ij}-k.

4.8. Def. Legyen A összefüggő bázisalgebra, véges dimenziós a K test fölött. Az A algebra Γ_A Gabriel-gráfját („ordinary quiver") az alábbi módon értelmezzük.

Legyen $1 = e_1 + \cdots + e_n$ egy tetszőleges felbontás primitív ortogonális idempotensekre.

(i) Γ_A csúcsai: $\{1, \ldots, n\} \longleftrightarrow \{e_1 \ldots e_n\} \longleftrightarrow \{S(1), \ldots, S(n)\}$

egyszerű modulusok izomorfiaosztályai $\longleftrightarrow$

$\{P(1), \ldots, P(n)\}$ direkt felbonthatatlan projektívek izomorfiaosztályai

$\longleftrightarrow \{I(1), \ldots I(n)\}$ direkt felbonthatatlan injektívek izom. osztályai

(Itt: $P(i) \longrightarrow S(i) \longrightarrow 0$ projektív fedő

$0 \longrightarrow S(i) \longrightarrow I(i)$ injektív burok

$P(i) \cong e_i A$)

(ii) $i \overset{\alpha_1}{\underset{\alpha_k}{\overset{\alpha_2}{\underset{\vdots}{\rightrightarrows}}}} j \iff e_i\,(\mathrm{rad}\,A/\mathrm{rad}^2 A)\,e_j$ egy bázisa K fölött

4.9. Állítás Γ_A nem függ az idempotensek választásától, tehát az A egyértelműen meghatározza Γ_A-t.

Biz. Következik a Krull–Schmidt-tételből, kihasználva néhány egyszerű izomorfizmust, pl.: $e_i(\mathrm{rad}\,A/\mathrm{rad}^2 A) \cong \mathrm{rad}(e_iA)/\mathrm{rad}^2(e_iA)$,

$$Me_j \cong \mathrm{Hom}(e_jA, M) \text{ stb.}$$

4.10. Állítás A összefüggő $\Rightarrow$ Γ_A összefüggő.

Biz. Hasonlóan a korábbi okoskodáshoz.

4.11. Példa: 1) $A = K[x]/(x^m) \Rightarrow J(A) = (x)/(x^m)$

$$A/J(A) \cong K$$

$\Rightarrow$ 1 csúcs, $e_1 = 1$, $J(A)/J(A)^2 = (x)/(x)^2$

1 dimenziós

$$\Rightarrow \Gamma_A:\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

2) $A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rad}\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rad}^2 A = 0$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Gamma_A:\ \begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \arrow[dl] \\ 1 & \\ & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

3) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ e & d & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d, e \in K \right\}$

$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; e \in K \right\}$

$B = A/I$

Itt: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + I$; $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I$ egy teljes idempotensrendszer

$\operatorname{rad} B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} + I \;\middle|\; c, d \in K \right\}$, $\quad \operatorname{rad}^2 B = 0$

Itt $e_1 \operatorname{rad} B\, e_2$ és $e_2 \operatorname{rad} B\, e_1$ 1 dimenziósak

$\Rightarrow \quad \Gamma_B : \quad 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2$

4.12. Állítás $A = K\Gamma / I$, ahol I megengedett ideál $\Rightarrow \Gamma_A = \Gamma$, tehát az A Gabriel-gráfjaként visszakapjuk az eredeti gráfot.

Biz: Könnyű számolás.

(Érdemes észrevenni: ha I generálói során olyan éleket is megengedünk, amelyek nem részei R_Γ^2-nek, akkor vagy élet vagy csúcsot veszítenénk az eredeti Γ-ból, attól függően, hogy az I-beli élek csak R_Γ^2-ből „lógnak ki", de benne vannak R_Γ-ban, vagy még R_Γ-ben sincsenek benne.)

4.13. Tétel (≈ Gabriel) Legyen K algebrailag zárt test, A összefüggő, véges dimenziós bázisalgebra K fölött. Ekkor $\exists\, I \triangleleft K\Gamma_A$ megengedett ideál, melyre $A \cong K\Gamma_A / I$.

Biz. (Először is vegyük észre, hogy ha $A \cong K\Gamma / I$ valamilyen Γ-val, I-vel, akkor az előző állítás alapján $\Gamma = \Gamma_A$. Tehát csak Γ_A-ból indulhatunk ki.)

Tudjuk: $1_A = e_1 + \dots + e_n$, és ekkor Γ_A csúcsai: $\{1, \dots, n\}$. $K\Gamma_A$ idempotenseit jelöljük a szokásostól eltérő módon ε_i-kkel.

Legyen most: $\varphi_0 : \varepsilon_i \longmapsto e_i$

$$V(\Gamma_A) \longrightarrow A \quad \text{egy megfeleltetés.}$$

Tekintsük továbbá $\alpha \in E(\Gamma_A)$-t. α-hoz rendeljünk egy $x_\alpha \in \operatorname{rad} A$ elemet oly módon, hogy:

$$\{ x_\alpha + \operatorname{rad}^2 A \mid \alpha : i \longrightarrow j \}$$

bázist alkosson $e_i(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A)e_j$-ben.

(Tudjuk, hogy annyi nyíl megy i-ből j-be, amennyi a fenti altér dimenziója.)

Ekkor a gráfalgebra univerzalitási tulajdonsága miatt (4.3) (ellenőrizendők a feltételek!) $\exists\, \varphi : K\Gamma_A \longrightarrow A$ homomorfizmus.

Megmutatjuk, hogy φ szürjektív.

Mivel K algebrailag zárt bázisalgebra (és véges dimenziós),

$A/\text{rad}\,A$-t generálják az $e_i + \text{rad}\,A$ elemek.

$\big(A/\text{rad}\,A = K \times K \times \dots \times K$: bázisalgebra $\Rightarrow$ mert redukált! K alg. zárt $\Rightarrow$ $\forall$ kapcsos K, K-nak nincs $\nexists$ véges dim. ferdetest bővítése$\big)$.

Elegendő tehát megmutatni, hogy $\text{rad}\,A$-t generálják az x_α elemek. Ehhez pedig elegendő megmutatni, hogy

$\forall x \in \text{rad}\,A$, $\forall k > 0$ $\exists\, p(x_\alpha \mid \alpha)$ polinom, hogy

$$x - p \in (\text{rad}(A))^k$$

Ez elég lesz, hiszen $\exists t$: $(\text{rad}\,A)^t = 0$, így $x = p$ valamilyen p kifejezésre.

Az állítást k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

$k = 1$-re az állítás nyilvánvaló, hiszen x_α-k bázisát adják $(\text{rad}\,A / \text{rad}^2 A)$-nak, így $\exists\, p(x_\alpha)$:

$$x' = x - p(x_\alpha) \in \text{rad}^2 A.$$

A továbbiakban viszont, ha k-ra tudjuk, akkor $k+1$-re használjuk azt, hogy $\text{rad}^{k+1} A = \text{rad}^k A \cdot \text{rad}\,A$

Mivel tehát φ szürjektív, azt kaptuk, hogy $A \cong K\Gamma_A / \text{Ker}\,\varphi$.

Csak azt kell megmutatni, hogy $\text{Ker}\,\varphi = I$ megengedett ideál.

Tudjuk, hogy $\varphi(R_\Gamma) \subseteq \operatorname{rad} A \Rightarrow \varphi(R_\Gamma^l) \subseteq \operatorname{rad}^l A$.

Mivel rad A nilpotens, ezért $\exists\, m > 1$: $\operatorname{rad}^m A = 0 \Rightarrow$

$R_\Gamma^m \subseteq I = \operatorname{Ker}\varphi$.

Tehát már csak azt kell megmutatni, hogy $I \subseteq R_\Gamma^2$.

Legyen $x \in I$. Ekkor

$$x = \sum_1^n \lambda_i \varepsilon_i + \sum_\alpha \mu_\alpha \alpha + y$$

ahol $\lambda_i, \mu_\alpha \in K$, $y \in R_\Gamma^2$, és $\alpha \in E(\Gamma_A)$.

Mivel $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \sum_i \lambda_i e_i + \sum_\alpha \mu_\alpha x_\alpha + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \quad \sum \lambda_i e_i = - \sum_\alpha \mu_\alpha x_\alpha - \varphi(y) \in \operatorname{rad} A.$$

Viszont e_i-k ortogonális idempotensek, rad A pedig nilpotens $\Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i$-re.

Így viszont: $\sum_\alpha \mu_\alpha x_\alpha = -\varphi(y) \in \operatorname{rad}^2 A$

De x_α-k $(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A)$ bázisát adták $\rightsquigarrow \mu_\alpha = 0$ $\forall \alpha$.

Így $x = y \in R_\Gamma^2$.

Ezzel beláttuk, hogy I megengedett ideál.

A Gabriel-tétel bizonyítását befejeztük. □

4.14. Megjegyzés: 1) Ha K nem zárt algebrailag, akkor az állítás nem igaz: legyen α algebrai elem K fölött, $\alpha \notin K$. Ekkor $K(\alpha)$ nem gráfalgebra.

2) Az I általában nem egyértelmű. Pl.:

$$\Gamma: \quad 1 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

$$I_1 = (\alpha\cdot\beta) \qquad I_2 = (\alpha\beta - \alpha\gamma)$$

Ekkor $K\Gamma/I_1 \cong K\Gamma/I_2$

$$\varepsilon_i \longmapsto \varepsilon_i$$
$$\alpha \longmapsto \alpha$$
$$\gamma \longmapsto \gamma \qquad \text{ad egy izomorfizmust.}$$
$$\text{de: } \beta \longmapsto \beta - \gamma$$

4.15. Példa: Vegyük a 3.28. Feladat algebráját.

$${}_AA = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \qquad {}_AM = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus 2\,; \qquad B = \operatorname{End} M. \text{ Ekkor}$$

$$B = \Big\langle \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ 1 \to 1,\ 2 \to 2,\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to 1,$$
$$\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2,\ 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ 2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \Big\rangle$$

Vegyük észre, hogy a nem izomorfizmusok benne vannak $\operatorname{rad} B$-ben, mert ilyenek szorzata 3 lépésben 0 lesz. Tehát:

$$\operatorname{rad} B \supseteq \Big\langle \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to 1,\ \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2,\ 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ 2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \Big\rangle$$

Legyen: $\varepsilon_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\varepsilon_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\varepsilon_3 = (1 \to 1)$, $\varepsilon_4 = (2 \to 2)$

$\alpha = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to 1\right)$, $\beta = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2\right)$, $\gamma = \left(1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\delta = \left(2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$

A kimaradók: $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right) = \alpha\gamma$, $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) = \beta\delta$.

$$B_B = \begin{smallmatrix}1\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\4\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}$$