

5. Auslander - Reiter - elmélet: a reprezentációelmélet elveiről

Reprezentációelmélet: (véges dimenziós), test fölötti
dgfelek moduluskategóriájának a vizsgálata

Alapelvek: - direkt fölbonthatatlan modulusok

dejtétel: " \forall modulushoz illyen modul a
direkt összege, és ez a fölbonthatóság gyökere"

Sojios: ez általában nem igaz, de véges
dimenziós dgfelek fölötti véges generált
(= véges dimenziós) modulushoz közele

igaz: Krull-Schmidt-kategorió

Jde: A-mod v. mod-A.

- a morfizmusok is kezelni szeretnénk, a kategóriá-
ban a szűrés az elaprózódás helyett leprózódásba

dejtétel: " \forall morfizmus felbonthatatlan
morfizmusok összege ("szűrés" dejtétele)";

Gondok: - Mit értünk felbonthatatlan morfizmus alatt?

- Sojios, ez általában általában nem igaz, még
véges dimenziós modulushoz közele se (de
reprezentációvéges dgfelekre valószínűleg igeni végső
teljesül)

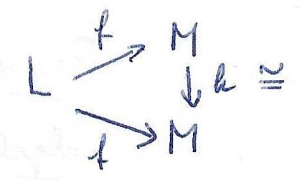
Fő eszencia lesz: - irreducibilis morfizmusok fogalma

- az eredeti mondatokba szereplő majdnem fölbontható
szűrés és az Auslander-Reiter-gyökere

5.1. Definíció: a) $f: L \rightarrow M$ belminidlis, ha

$\forall h \in \text{End } M$ -re:

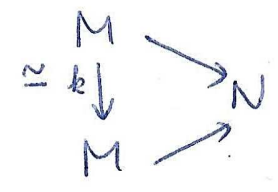
$hf = f \Rightarrow h$ automofins



b) $g: M \rightarrow N$ jöbminidlis, ha

$\forall k \in \text{End } M$ -re:

$gk = g \Rightarrow k$ automofins

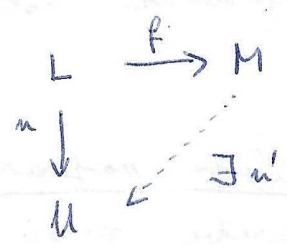


Megjegyzés: Ha f belminidlis, akkor pl. M -nek nem létezik $\text{Im } f$ -től diszjunkt direkt összeadandója, mert különben a komplexitásvetve való projekció nem lenne izomofins, de $\text{Im } f$ -en identikus hatna.

Hasonlóan: g jöbminidlis, akkor $\text{Ker } g$ -nek nem létezik nem triviális direkt összeadandója M -nek.

5.2. Definíció: a) $f: L \rightarrow M$ belről majdnem föllesedő, ha:

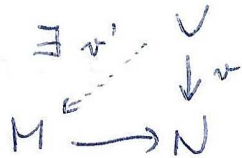
- (i) f nem föllesedő mono
- (ii) $\forall u: L \rightarrow U$ -re, ami nem föllesedő mono:



b) $g: M \rightarrow N$ jobbról majdnem föllesedő, ha

(i) g nem föllesedő epi

(ii) $\forall v: V \rightarrow N$ -re, ami nem föllesedő epi:



Megjegyzések: (i) nem föllesedő mono = \neg (föllesedő mono) azaz vagy nem föllesedő, vagy nem mono. Hasaldéppel a dualisra.

(ii) A majdnem föllesedő morfizus definíciójában a (ii) feltételrel szükséges a „nem föllesedő mono v. epi” feltétel, elkerülendő ezzel a triviális leképezés $(f \text{ v. } g)$ föllesedő lenne a hurokbeli teljesítésre esetén. Toldt ez a „legtöbb”, azt mellékelte.

5.3. Állítás: (Egyszerűség)

a) Ha $f: L \rightarrow M$ és $f': L \rightarrow M'$ bármelyik, balról majdnem föllesedő leképezések, akkor:



b) Dualis állítás.

Biz. Csak az a)-t bizonyítsd.

f, f' belől majdné föllesodó, ezt egyúttal egybe is föllesodó monó, rövént így:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{f} & M \\
 & \searrow f' & \downarrow h \\
 & & M' \\
 & & \uparrow h' \\
 & & L
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f' = hf \\
 f = h'f'
 \end{array}$$

Eldw: $f = h'hf$
 $f' = hh'f'$

Mivel f és f' balminidő $\Rightarrow h'h$ és $h'h$ atomofő $\Rightarrow h$ monofő.

Megjegyzés: Az állítás belől azt monda ki, hogy L -ből képezde csak egytő modulosbe és egytő módó indult ki balminidő, belől majdné föllesodó lefővés.

5.4. Állítás: a) Ha $f: L \rightarrow M$ belől majdné föllesodó, akkor L direkt fölbatlaltó.

b) Duple állítás.

Biz. Csak az a)-t bizonyítsd. T. föl: $L = L_1 \oplus L_2$ né triviale fölbató, $p_i: L \rightarrow L_i$ a vetítés. Eldw p_i né föllesodó monofő. Így:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{f} & M \\
 p_i \downarrow & \swarrow \exists u & \\
 L_i & &
 \end{array}$$

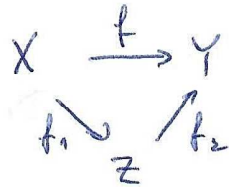
De eldw: $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}: M \rightarrow L_1 \oplus L_2 = L$
 olyan, hogy $uf = 1_L \Rightarrow f$ föllesodó monó \downarrow

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ehhez az állításhoz nem kellett a bal-, ill. jobb-minimalitás. (Az a lekezdés „másik végéről” mond ki valakit.)

5.5. Def. $f: X \rightarrow Y$ irreducibilis, ha:

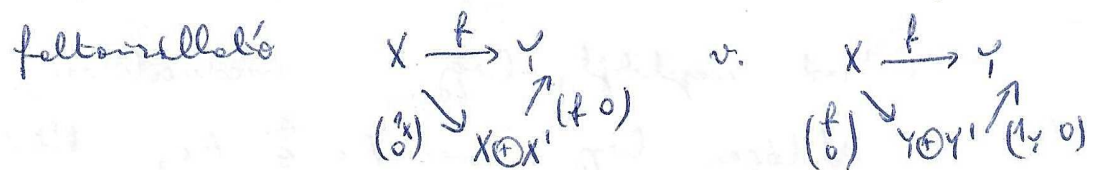
(a) f nem fölhasadó (epi v. mono)

(b) $f = f_2 f_1$ csak f_1 fölhasadó mono v. f_2 fölhasadó epi.



Megjegyzés: 1) Az (a) alapján irreducibilis morfizmus nem lehet izomorfizmus.

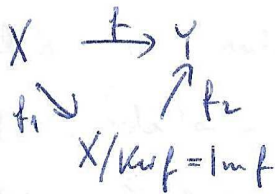
2) A (b) feltétel a „trivialis feltevéscsis” fogalmát fejezi meg: teljes $X \xrightarrow{f} Y$ morfizmus



módon. Az irreducibilis morfizmusok felelnek meg az irreducibilis elemeknek a SZAT-ban.

5.6. Értékelés: f irreducibilis $\Rightarrow f$ mono v. epi, és ebből következik hogy $\nexists f: X \rightarrow X$ irreducibilis A -modban.

Biz. T. fel: f se nem mono, se nem epi. Elhar:

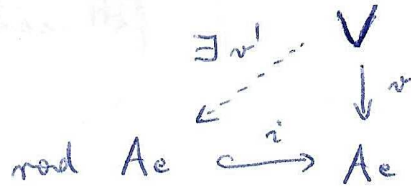


és itt: f_1 nem is mono
 f_2 nem is epi

5.7. Példa: a) $e \in A$ primitív idegyenes, Ae direkt fölborítással projektív. Ebből; ha $mod Ae \neq 0$, akkor

$$mod Ae \xrightarrow{i} Ae$$

jelből mégis föllesz és irreducibilis. Ugyis



T. jel. v nem föllesz epi

$De Ae$ projektív \Rightarrow
 v nem epi

Ekkor vanat $lv \in mod Ae$, hova $mod Ae$ az egyetlen nemtriviális résmodulus Ae -ben, és így

$\exists v': V \rightarrow mod Ae$ fölemelés v -nek

Ez tehát azt jelenti, hogy i jelből mégis föllesz.

Most meg kell látni, hogy i irreducibilis.

Világos, hogy $mod Ae \not\cong Ae$, tehát i nem föllesz mono, de nem is föllesz epi (mert nem is epi).

Másrészt, ha: $mod Ae \xrightarrow{i} Ae$ feltörés,



akkor: i epi $\Rightarrow f_1$ is epi, továbbá

$$lv f_2 \geq lv i = mod Ae$$

Ha $\text{Im } f_2 = \text{mod } A_e \Rightarrow f_2 f_1 \in \text{End}(\text{mod } A_e)$

$\Rightarrow f_1$ fölösleges mon.
 \uparrow
 $\text{mod } A_e$

Ha $\text{Im } f_2 \neq \text{mod } A_e \Rightarrow \text{Im } f_2 = A_e$, a projektív \Rightarrow

f_2 fölösleges epi.
 Ezzel belátható, hogy α irreducibilis.

b) Az előbbi dualis: Lege S epim., $E(S)$
 az injektív burk. Eldis.

$$p: E(S) \rightarrow E(S)/S$$

irreducibilis, belől majdnem fölösleges.

5.8. Def (A -mod modülöje)

$X, Y \in A$ -mod esetén legyen:

$$\text{mod}_A(X, Y) = \{ f \in \text{Hom}(X, Y) \mid \forall g \in \text{Hom}(Y, X): 1_X - gf \text{ inv.} \}$$

Eldis: 1) $\{ \text{mod}_A(X, Y) \mid X, Y \in A\text{-mod} \}$ "ideál" A -modban

(zárk. és összeadható, szorzható, alul és fölül)

2) X, Y direkt fölbontható \Rightarrow

$$\text{mod}_A(X, Y) = \{ f: X \rightarrow Y \text{ ne invertálható} \}$$

$$= \begin{cases} \text{Hom}_A(X, Y), & \text{ha } X \neq Y \\ \text{mod End}_A(X), & \text{ha } X = Y \end{cases}$$

(1, 2 biz. a: H.P.)

Legyen továbbá $\text{mod}_A^2(X, Y)$ a következő:

$$\text{mod}_A^2(X, Y) = \left\{ \sum_i g_i \circ h_i \in \text{Hom}(X, Y) \mid \begin{array}{l} h_i \in \text{mod}(X, Z_i), \\ g_i \in \text{mod}(Z_i, Y) \end{array} \right\}$$

Nyilvánvalóan $\text{mod}_A^2(X, Y) \subseteq \text{mod}(X, Y)$, és minden $\text{mod}_A^2(X, Y)$ -ben lévő elem $\text{mod}(X, Y)$ -ben is van.

5.9. All (Irreducibilis morfizmus jellemzése A -mod modulárisokkal)

Legyen X, Y direkt fölbontható modulok. Ekkor:

$$f: X \rightarrow Y \text{ irreducibilis} \iff f \in \text{mod}_A(X, Y) \setminus \text{mod}_A^2(X, Y)$$

Biz. \Rightarrow : Irreducibilis morfizmus nem lehet két irreducibilis morfizmus kompozíciója, azaz $f \in \text{mod}_A(X, Y)$.

T. most fel, hogy $f = g \circ h$, ahol: $h: X \rightarrow Z = \bigoplus Z_i$
 $g: Z = \bigoplus Z_i \rightarrow Y$,

és itt $Z_i \neq 0$ direkt fölbontható modulok, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{pmatrix}$, $g = (g_1, \dots, g_t)$,

azaz $f = \sum_i g_i \circ h_i$, és $h_i \in \text{mod}_A(X, Z_i)$, $g_i \in \text{mod}_A(Z_i, Y)$

Mivel f irreducibilis \Rightarrow v. h fölhasadós mono,
 vagy g fölhasadós epi.

T. fel. pl.: $\exists h' = (h'_1, \dots, h'_t): \bigoplus Z_i \rightarrow X$ olyan, hogy

$$h' \circ h = 1_X \quad (\text{azaz } h \text{ fölhasadós mono}).$$

De itt h_i nem invertálható $\Rightarrow h'_i \circ h_i$ nem lesz invertálható.

Ha ugyanis h_i nem egyértelmű $\Rightarrow h'_i \circ h_i$ nem 0 ;

ha viszont h_i nem szinguláris, de egyértelmű, akkor

$h_i' h_i$ invertálható, ahhoz $\exists h_i'' : X \rightarrow X$:

$$h_i'' h_i' h_i = 1_X$$

és ahhoz: $h_i h_i'' h_i' h_i = h_i$ miatt ezt beírjuk:

$$\text{Im } h_i \stackrel{+}{=} Z_i.$$

De $\text{Im } h_i \neq Z_i$, ha h_i nem szinguláris \Rightarrow elletmondás,
ha Z_i direkt fölborított volna.

Ebből látszik: $h_i' h_i$ nem invertálható.

Ugyanezért: $1_X = h_i' h_i = \sum_1^t h_i' h_i$, és itt h_i -re

$$h_i' h_i \in \text{rad}(E \text{nd } X) \Rightarrow 1_X \in \text{rad } E \text{nd } X \text{ g.}$$

Ezzel belátszik, hogy h nem fölleszárt mono.

Hasonló (direkt) adalás utója, hogy g nem fölleszárt epi.
epimorf.

Ez viszont azt jelenti, hogy f mégse irreducibilis,
az elletmond a fölteszártasra.

Így látszik: f irreducibilis $\Rightarrow f \in \text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y)$.

\Leftarrow : Tegyük most fél, hogy $f \in \text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y)$.

Itt X, Y direkt fölborítottak, f nem zero \Rightarrow
 f nem fölleszárt mono és nem fölleszárt epi.

T. most fél:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \nearrow g \\ & Z & \end{array} \quad f = gh$$

Balról Z -t direkt fölborítottak írjuk fel:

$$Z = \bigoplus_1^t Z_i$$

Eldw: $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{pmatrix}: X \rightarrow \bigoplus \mathbb{Z}_i$ és

$g = (g_1, \dots, g_t): \bigoplus \mathbb{Z}_i \rightarrow Y$

$\Rightarrow f = \sum_1^t g_i h_i$

Mivel $f \notin \text{rad}_A^2(X, Y) \Rightarrow \exists i: h_i$ invertálható
 vagy $\exists j: g_j$ invertálható.

Az első esetben h fellesedő mono, a
 másodikban pedig g fellesedő epi.

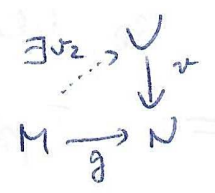
Ezrel belátható, hogy

$f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y) \Rightarrow f$ irreducibilis. \square

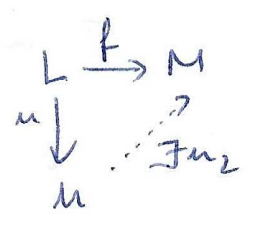
5.10. All. (Irreducibilis monomorfizmus és epimorfizmus jellemzése)

Legyen $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ re fellesedő, epim.

a) $f: L \rightarrow M$ irreducibilis $\Leftrightarrow \forall \begin{matrix} \downarrow \nu \\ L \\ \downarrow \nu \\ N \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow f \\ M \rightarrow N \\ \searrow g \end{matrix}$ vagy



b) $g: M \rightarrow N$ irreducibilis $\Leftrightarrow \forall \begin{matrix} L \\ \downarrow \nu \\ M \end{matrix} \begin{matrix} L \xrightarrow{f} M \\ \downarrow \nu \\ M \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow f \\ M \rightarrow N \\ \searrow g \end{matrix}$ vagy



Biz. Csak az a)-t bizonyítjuk.

\Rightarrow : T. fül: f irreducibilis. Legye $v: V \rightarrow N$ telj.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Első:} & 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g'} & V & \rightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow u & & \downarrow v & & \\ \text{E.} & 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Itt $f = u f'$, és mivel f irreducibilis \Rightarrow

f' füllesedő mono vagy u füllesedő epi.



g' füllesedő epi



$\exists v_1: V \rightarrow M$



$\exists u': M \rightarrow E:$

$u'u = 1_E$



$\exists v_2: M \xrightarrow{u'} E \xrightarrow{g'} V$

\Leftarrow : T. fül: teljesülnek a szuszitívumértelmezési feltételek.

Art tudjuk: f nem füllesedő mono } lenne az eredeti sorat nem füllesedő.
 f nem füllesedő epi

T. rost fül: $L \xrightarrow{f} M$ $f = f_1 f_2$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow f_1 \\ f_2 \downarrow & u & \end{array}$$

Mivel f mono $\Rightarrow f_2$ mono \Rightarrow belátható az alábbi diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{E}': & 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{f_2} & M & \rightarrow & V & \rightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow f_1 & & \downarrow v & & \\ \text{E}'': & 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

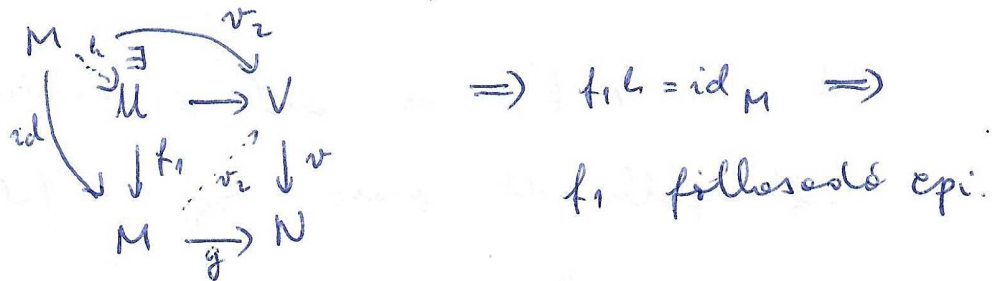
ahol $V = \text{Coker } f_2$

Itt az első oszlop létezik $\Rightarrow \exists v: V \rightarrow N$ is.

De a digmra helyéből azt kapjuk, hogy $\xi' = \xi''v$.

Tudjuk: ha $\exists v_1: V \rightarrow M \Rightarrow \xi''v$ fölösleges $\Rightarrow f_2$ fölösleges mono.

Ha viszont $\exists v_2: M \rightarrow V$, akkor.



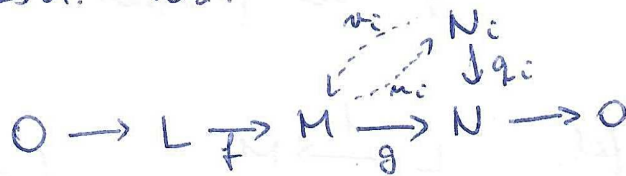
Ezzel belátható: f irreducibilis.

5.11. Köv. a) Ha $L \xrightarrow{f} M$ irr. mono $\Rightarrow N = \text{Coker } f$ direkt felbontható.

b) Ha $M \xrightarrow{g} N$ irr. epi $\Rightarrow L = \text{Ker } g$ dir. felb.

Biz: Csak az a)-t. Legyen: $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ exakt, f irr. Ekkor ez nyilván nem fölösleges.

T. fel. $N = N_1 \oplus N_2$, $N_i \neq 0$, legyen $q_i: N_i \rightarrow N$ a beágyazások. Tehát:



Ha $i=1$ -re vagy 2 -re: $\exists u_i: M \rightarrow N_i$, akkor q_i mono és epi is.

Így $i=1$ -re vagy 2 -re: $\exists v_i: N_i \rightarrow M$, melyre: $g \circ v_i = q_i$.

Ekkor: $v = (v_1, v_2): N_1 \oplus N_2 \rightarrow M$ úgy, hogy:

$$g \circ v = 1_N$$

$\Rightarrow g$ fölösleges epi $\Rightarrow f$ fölösleges mono,

ami ellentmondás, mert f irreducibilis. \square