5. Auslander–Reiter-elmélet: a reprezentációelmélet elemei

Reprezentációelmélet: (véges dimenziós), test fölötti algebrák moduluskategóriájának a vizsgálata

Alapelemek: – direkt fölbonthatatlan modulusok

alapötlet: „∀ modulus ilyenek direkt összege, és ez a fölbontás egyértelmű"

Sajnos: ez általában nem igaz, de véges dimenziós algebrák fölötti végesen generált (= véges dimenziós) modulusok körében

igaz: Krull–Schmidt-kategória

Jele: A-mod v. mod-A.

– a morfizmusokat is hasonlóan szeretnénk, a kategóriában a szerepe az alapérvekkel valóban lépésekben

más alapötlet: „∀ morfizmus felbonthatatlan morfizmusok szorzata („sodelidet deptétele");"

Gondok: – Mit értünk felbonthatatlan morfizmuson?

– Sajnos, ez állítás általában nem igaz, még véges dimenziós modulusok körében se (de reprezentációvéges algebrákra valami ilyesmi mégis teljesül)

Fő eszköz lesz: – irreducibilis morfizmusok fogalma

– az ezeket mederbe szervező majdnem fölhasadó sorozatok és az Auslander–Reiter-gráfok

5.1. Definíció a) $f: L \to M$ <u>balminimális</u>, ha $\forall h \in \operatorname{End} M$-re:

$hf = f \Rightarrow h$ automorfizmus

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "h\ \cong"] \\ L \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

b) $g: M \to N$ <u>jobbminimális</u>, ha

$\forall k \in \operatorname{End} M$-re:

$gk = g \Rightarrow k$ automorfizmus

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\cong\ k"'] \arrow[dr] & \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

<u>Megjegyzés</u>: Ha f balminimális, akkor pl. M-nek nem létezhet $\operatorname{Im} f$-től diszjunkt direkt összeadandója, mert különben a komplementerre való projekció nem lenne izomorfizmus, de $\operatorname{Im} f$-en identikusan hatna.

Hasonlóan: g jobbminimális, akkor $\operatorname{Ker} g$-be nem létezhet nem triviális direkt összeadandója M-nek.

5.2. Definíció a) $f: L \to M$ <u>balról majdnem felhasadó</u>, ha:

(i) f nem felhasadó mono

(ii) $\forall u: L \to U$-ra, ami nem felhasadó mono:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

b) $g: M \to N$ jobbról majdnem fölösleges, ha

(i) g nem fölösleges epi

(ii) $\forall\, v: V \to N$-re, ami nem fölösleges epi:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "\exists v'"'] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

Megjegyzések: (i) nem fölösleges mono $= \neg$(fölösleges mono)

azaz vagy nem fölösleges, vagy nem mono

Hasonlóképpen a duálisra.

(ii) A majdnem fölösleges morfizmusok definíciójában a (ii) feltételnél szükséges a „nem fölösleges mono v. epi" feltétel, ellenkező esetben a kiinduló leképezés (f v. g) fölösleges lenne a követelmény teljesülése esetén. Tehát ez a „legtöbb" amit mondhatunk.

5.3. Állítás: (Egyértelműség)

a) Ha $f: L \to M$ és $f': L \to M'$ balminimális, balról majdnem fölösleges leképezések, akkor:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dashed] \\ L \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & M' \end{tikzcd} \quad \exists h \text{ izomorfizmus}$$

b) Duális állítás.

Biz. Csak az a)-t bizonyítjuk.

f, f' balról majdnem fölöslegesek, ezért egyrészt egyik sem fölösleges mono, másrészt így:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, shift right, "\exists h"'] \\ L \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] \arrow[r, phantom, ""] & M' \arrow[u, shift right, "h' \exists"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} f' &= hf \\ f &= h'f' \end{aligned}$$

Ekkor: $f = h'hf$

$f' = hh'f'$

Mivel f és f' balminimálisak $\Rightarrow$ $h'h$ és hh' automorfizmusok $\Rightarrow$ h izomorfizmus.

Megjegyzés: Az állítás belátt azt mondja ki, hogy L-ből lényegében csak egyetlen modulusba és egyetlen módon indulhat ki balminimális, balról majdnem fölösleges leképezés.

5.4. Állítás: a) Ha $f: L \longrightarrow M$ balról majdnem fölösleges, akkor L direkt fölbonthatatlan.

b) Duális állítás.

Biz. Csak az a)-t bizonyítjuk. T. föl.: $L = L_1 \oplus L_2$ nem triviális fölbontás, $p_i: L \longrightarrow L_i$ a vetítések. Ekkor p_i nem fölösleges monomorfizmus. Így:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists u_i"] \\ L_i & \end{tikzcd}$$

De akkor: $u = \binom{u_1}{u_2}: M \longrightarrow L_1 \oplus L_2 = L$ olyan, hogy $uf = 1_L \Rightarrow f$ fölösleges mono ↯

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ehhez az állításhoz nem kellett a bal-, ill. jobb-minimalitás. (Az a lebontás „másik végéről" mond ki valamit.)

5.5. Def. $f: X \to Y$ irreducibilis, ha:

(a) f nem fölhasadó (epi v. mono)

(b) $f = f_2 f_1$ esetén f_1 fölhasadó mono v. f_2 fölhasadó epi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

Megjegyzés: 1) Az (a) alapján irreducibilis morfizmus nem lehet izomorfizmus.

2) A (b) feltétel a „triviális faktorizáció" fogalmát fogja meg: tetsz. $X \xrightarrow{f} Y$ morfizmus faktorizálható

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\binom{1_X}{0}"'] & & Y \\ & X \oplus X' \arrow[ur, "(f\ 0)"'] & \end{tikzcd} \quad \text{v.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\binom{f}{0}"'] & & Y \\ & Y \oplus Y' \arrow[ur, "(1_Y\ 0)"'] & \end{tikzcd}$$

módon. Az irreducibilis morfizmusok felelnek meg az irreducibilis elemeknek a SZAT-ban.

5.6. Észrevétel: f irreducibilis $\Rightarrow$ f mono v. epi, és ebből következik, hogy $\nexists\, f: X \to X$ irreducibilis A-modban.

Biz.: T. föl: f se nem mono, se nem epi. Ekkor:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & Y \\ & X/\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

és itt: f_1 nem is mono
f_2 nem is epi

5.7. Példa: a) $e \in A$ primitív idempotens, Ae direkt fölbonthatatlan projektív. Ekkor, ha $\mathrm{rad}\, Ae \neq 0$, akkor

$$\mathrm{rad}\, Ae \xhookrightarrow{i} Ae$$

jobbról majdnem fölhasadó és irreducibilis. Ugyanis:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "\exists v'"'] \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{rad}\, Ae \arrow[r, hook, "i"] & Ae \end{tikzcd}$$

T. föl. v nem fölhasadó epi
De Ae projektív $\Rightarrow$
v nem epi

Ekkor viszont $\mathrm{Im}\, v \subseteq \mathrm{rad}\, Ae$, hiszen $\mathrm{rad}\, Ae$ az egyetlen maximális részmodulus Ae-ben, és így

$\exists v'$: $V \longrightarrow \mathrm{rad}\, Ae$ fölemelése v-nek

Ez tehát azt jelenti, hogy i jobbról majdnem fölhasadó.

Most megmutatjuk, hogy i irreducibilis.

Világos, hogy $\mathrm{rad}\, Ae \overset{\oplus}{\not\leq} Ae$, tehát i nem fölhasadó mono, de nem is fölhasadó epi (mert nem is epi).

Másrészt, ha: $\mathrm{rad}\, Ae \xhookrightarrow{i} Ae$ faktorizáció,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rad}\, Ae \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Ae \\ & X \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

akkor: i injektív $\Rightarrow$ f_1 is injektív, továbbá

$$\mathrm{Im}\, f_2 \supseteq \mathrm{Im}\, i = \mathrm{rad}\, Ae$$

Ha $\mathrm{Im}\, f_2 = \mathrm{rad}\, Ae \Rightarrow f_2 f_1 \in \mathrm{End}\,(\mathrm{rad}\, Ae)$

$$f_2 f_1 = 1|_{\mathrm{rad}\, Ae}$$

$\Rightarrow f_1$ fölösleges mono.

Ha $\mathrm{Im}\, f_2 \neq \mathrm{rad}\, Ae \Rightarrow \mathrm{Im}\, f_2 = Ae$, ami projektív $\Rightarrow$

f_2 fölösleges epi.

Ezzel beláttuk, hogy i irreducibilis.

b) Az előbbi duálisa: Legyen S egyszerű, $E(S)$ az injektív burka. Ekkor:

$$p: E(S) \longrightarrow E(S)/S$$

irreducibilis, belátható majdnem fölösleges.

5.8. Def (A-mod radikálja)

$X, Y \in A\text{-mod}$ esetén legyen:

$$\mathrm{rad}_A(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}(X,Y) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}(Y,X):\ 1_X - gf \text{ inv.}\}$$

Ekkor: 1) $\{\mathrm{rad}_A(X,Y) \mid X, Y \in A\text{-mod}\}$ „ideál" A-mod-ban

(zárt az összeadásra, szorzásra, alul és felülről)

2) X, Y direkt felbonthatatlanok $\Rightarrow$

$$\mathrm{rad}_A(X,Y) = \{f: X \to Y \text{ nem invertálható}\}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(X,Y), & \text{ha } X \not\cong Y \\ \mathrm{rad}\, \mathrm{End}_A(X), & \text{ha } X = Y \end{cases}$$

(1, 2 biz.-a: Hf.)

Legyen továbbá $\mathrm{rad}^2_A(X,Y)$ a következő:

$$\mathrm{rad}^2_A(X,Y) = \left\{ \sum_i g_i h_i \in \mathrm{Hom}(X,Y) \;\middle|\; h_i \in \mathrm{rad}(X,Z_i),\ g_i \in \mathrm{rad}(Z_i,Y) \right\}$$

Nyilván $\mathrm{rad}^2(X,Y) \subseteq \mathrm{rad}(X,Y)$, és részbetűs? altér $\mathrm{Hom}(X,Y)$-ban.

<u>5.9. Áll</u> (Irreducibilis morfizmusok jellemzése A-mod radikáljával)

Legyenek X, Y direkt fölbonthatatlanok. Ekkor:

$$f: X \to Y \text{ irreducibilis } \Longleftrightarrow f \in \mathrm{rad}_A(X,Y) \setminus \mathrm{rad}^2_A(X,Y)$$

<u>Biz</u> $\Rightarrow$: Irreducibilis morfizmusok nem lehetnek izomorfizmusok ezért $f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)$.

T. most föl, hogy $f = gh$, ahol: $h: X \to Z = \oplus Z_i$
$g: Z = \oplus Z_i \to Y$,

és itt Z_i direkt fölbonthatatlan, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{pmatrix}$, $g = (g_1, \dots g_t)$,

ekkor $f = \sum_i g_i h_i$, és $h_i \in \mathrm{rad}_A(X, Z_i)$, $g_i \in \mathrm{rad}_A(Z_i, Y)$

Mivel f irreducibilis $\Rightarrow$ v. h felhasadó mono, vagy g felhasadó epi.

T. föl pl.: $\exists\, h' = (h_1', \dots h_t'): \oplus Z_i \to X$ olyan, hogy $h'h = 1_X$ (ekkor h felhasadó mono).

De itt h_i nem invertálható $\Rightarrow$ $h_i' h_i$ sem lesz invertálh.

Ha ugyanis h_i nem injektív $\Rightarrow$ $h_i' h_i$ sem az;

ha viszont h_i nem szürjektív, de injektív, ugyanakkor

$h_i' h_i$ invertálható, akkor $\exists\, h_i'': X \to X$:

$$h_i'' h_i' h_i = 1_X$$

és akkor: $h_i h_i'' h_i' h_i = h_i$ miatt azt kapjuk:

$$\operatorname{Im} h_i \overset{\oplus}{\leq} Z_i.$$

De $\operatorname{Im} h_i \neq Z_i$, hiszen h_i nem szürjektív $\Rightarrow$ ellentmondás, hiszen Z_i direkt felbonthatatlan.

Ebből látszik: $h_i' h_i$ nem invertálható.

Ugyanakkor: $1_X = h'h = \sum_1^t h_i' h_i$, és itt $\forall i$-re

$h_i' h_i \in \operatorname{rad}(\operatorname{End} X) \Rightarrow 1_X \in \operatorname{rad} \operatorname{End} X$ ↯.

Ezzel beláttuk, hogy h nem felhasadó mono.

Hasonló (duális) adódás mutatja, hogy g nem felhasadó epimorfizmus.

Ez viszont azt jelenti, hogy f mégsem irreducibilis, ami ellentmond a feltevésünknek.

Így beláttuk: f irreducibilis $\Rightarrow f \in \operatorname{rad}(X,Y) \setminus \operatorname{rad}^2(X,Y)$.

$\Leftarrow$: Tegyük most fel, hogy $f \in \operatorname{rad}(X,Y) \setminus \operatorname{rad}^2(X,Y)$.

Itt X, Y direkt felbonthatatlanok, f nem izomorfizmus $\Rightarrow$ f nem felhasadó mono és nem felhasadó epi.

T. most fel:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad f = gh$$

Bontsuk Z-t direkt felbonthatatlanok összegére:

$$Z = \bigoplus_1^t Z_i$$

Ekkor: $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{pmatrix} : X \longrightarrow \oplus Z_i$ és

$$g = (g_1, \dots, g_t) : \oplus Z_i \longrightarrow Y$$

$$\Longrightarrow f = \sum_{1}^{n} g_i h_i$$

Mivel $f \notin \mathrm{rad}^2_A(X, Y) \Longrightarrow \exists i: h_i$ invertálható vagy $\exists j: g_j$ invertálható.

Az első esetben h felhasadó mono, a másodikban pedig g felhasadó epi.

Ezzel beláttuk, hogy

$$f \in \mathrm{rad}_A(X, Y) \setminus \mathrm{rad}^2_A(X, Y) \Longrightarrow f \text{ irreducibilis.} \quad \square$$

5.10. Áll: (Irreducibilis monomorfizmusok és epimorfizmusok jellemzése)

Legyen $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ nem felhasadó egzakt.

a) $f: L \longrightarrow M$ irreducibilis $\Longleftrightarrow \forall \begin{array}{c} V \\ \downarrow v \\ N \end{array}$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "\exists v_1"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$ vagy

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\exists v_2"] \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

b) $g: M \longrightarrow N$ irreducibilis $\Longleftrightarrow \forall \begin{array}{c} L \\ \downarrow u \\ U \end{array}$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists u_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$ vagy

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists u_2"'] & \end{tikzcd}$$

Bz. Csak az a)-t bizonyítjuk.

$\Rightarrow$: T. föl: f irreducibilis. Legyen $v: V \to N$ tetsz.

Ekkor:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}v: 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\ \mathcal{E}: 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Itt $f = uf'$, és mivel f irreducibilis $\Rightarrow$

f' felhasadó mono vagy u felhasadó epi.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

g' felhasadó epi $\qquad\qquad$ $\exists\, u': M \to E$: $u'u = 1_E$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\exists\, v_1: V \to M$ $\qquad\qquad$ $\exists\, v_2: M \xrightarrow{u'} E \xrightarrow{g'} V$

$\Leftarrow$: T. föl: teljesülnek a keresztülvezethetőségi feltételek.

Azt tudjuk: $\left.\begin{array}{l} f \text{ nem felhasadó mono} \\ f \text{ nem felhasadó epi} \end{array}\right\}$ hiszen az eredeti sorozat nem felhasadó.

T. most föl:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\ & U \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

$f = f_1 f_2$

Mivel f mono $\Rightarrow$ f_2 mono $\Rightarrow$ tekinthetjük az alábbi diagramot:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}': 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\ \mathcal{E}'': 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ahol $V = \operatorname{Coker} f_2$

Itt az első négyzög létezik $\Rightarrow \exists\, V \xrightarrow{v} N$ is.

De a diagram aljából azt kapjuk, hogy $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''v$.

Tudjuk: ha $\exists v_1 : V \longrightarrow M \Rightarrow \mathcal{E}''v$ felhasad $\Rightarrow$ f_2 felhasadó mono.

Ha viszont $\exists v_2 : M \longrightarrow V$, akkor:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dashed, "h"', "\exists"] \arrow[rr, bend left, "v_2"] \arrow[ddr, bend right, "id"'] & & \\
& M \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & V \arrow[d, "v"] \\
& M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "v_2"] & N
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f_1 h = id_M \Rightarrow$ f_1 felhasadó epi.

Ezzel beláttuk: f irreducibilis.

5.11. Köv. a) Ha $L \xrightarrow{f} M$ irr. mono $\Rightarrow N = \mathrm{Coker}\, f$ direkt felbonthatatlan.

b) Ha $M \xrightarrow{g} N$ irr. epi $\Rightarrow L = \mathrm{Ker}\, g$ dir. felb.

Biz: Csak az a)-t. Legyen: $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ egzakt, f irr. Ekkor ez nyilván nem felhasadó.

T. fel. $N = N_1 \oplus N_2$, $N_i \neq 0$, legyenek $q_i : N_i \to N$ a beágyazások. Tek:

$$\begin{tikzcd}
& & & N_i \arrow[dl, dashed, bend right, "v_i"'] \arrow[d, "q_i"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "u_i"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ha $i = 1$-re vagy 2-re: $\exists u_i : M \longrightarrow N_i$, akkor q_i mono és epi ↯.

Így $i = 1$-re, 2-re: $\exists v_i : N_i \longrightarrow M$, melyekkel: $g v_i = q_i$.

Ekkor: $v = (v_1, v_2) : \underset{\overset{\|}{N}}{N_1 \oplus N_2} \longrightarrow M$ olyan, hogy:

$g v = 1_N$

$\Rightarrow g$ felhasadó epi $\Rightarrow f$ felhasadó mono, ami ellentmondás, mert f irreducibilis. □