Majdnem felhasadó sorozatok (folytatás)

5.12. Lemma a) Legyen $f: L \to M$ mono, L direkt felbonthatatlan. Ekkor:

f nem felhasadó monomorfizmus $\Longleftrightarrow$

az $f^* = \mathrm{Hom}(f, id_L): \mathrm{Hom}(M, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, L)$

$$g \longmapsto gf$$

leképezésre $\mathrm{Im}\, f^* \subseteq \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(L)$

b) Duális állítás.

Biz. Csak az a)-t bizonyítjuk.

Vegyük észre: L direkt felbonthatatlan $\Rightarrow$ $\mathrm{End}(L)$ lokális.

Ha $\mathrm{Im}\, f^* \not\subseteq \mathrm{rad}\, \mathrm{End}(L) \Rightarrow \exists h: M \to L$, hogy:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"'] & M \arrow[d, "h"] \\ & L \end{tikzcd}$$

$k = hf$ invertálható

$\Rightarrow$ ekkor $1_L = k^{-1}hf$ $\Rightarrow$

f felhasadó monomorfizmus.

Megfordítva, ha $\exists h: M \to L$, melyre $hf = 1_L \Rightarrow$

$1_L \in \mathrm{Im}\, f^*$ (hiszen $1_L = f^*(h)$), így:

$$\mathrm{Im}\, f^* \not\subseteq \mathrm{End}(L).$$

Ezzel az ekvivalenciát beláttuk.

5.13. Tétel (Irreducibilis morfizmusok és a majdnem fölhasadó leképezések kapcsolata)

a) Legyen $f: L \to M$ balminimális, balról majdnem fölhasadó leképezés. Ekkor: f irreducibilis.

Továbbá: $f': L \to M'$ irreducibilis $\iff$ $M' \neq 0$, és $\exists M''$: $M \cong M' \oplus M'$, továbbá $f'': L \to M''$, hogy $\binom{f'}{f''}: L \to M' \oplus M''$ balminimális, balról majdnem fölhasadó (tehát az 5.3 Állítás alapján föltehető: $\binom{f'}{f''} = f$)

b) Duális állítás.

Biz. Ismét csak az a)-t bizonyítjuk.

Legyen tehát $f: L \to M$ balminimális, balról majdnem fölhasadó. Ekkor f nem fölhasadó monomorfizmus, továbbá tudjuk, hogy L direkt fölbonthatatlan (5.4. Állítás), így mivel f nem izomorfizmus, ezért f nem is fölhasadó epimorfizmus. Megmutatjuk, hogy f irreducibilis.

Tegyük föl, hogy $f = f_1 \cdot f_2$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\ & X \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

Tegyük föl, hogy f_2 nem fölhasadó monomorfizmus. Megmutatjuk, hogy f_1 fölhasadó epimorfizmus.

Mivel f belről majdnem felhasadó, ezért:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists f_2'"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \exists f_2' : \quad f_2' f = f_2$$

Így: $f = f_1 f_2 = f_1 f_2' f$, és itt $f_1 f_2' \in \mathrm{End}(M)$.

Mivel f belminimális, ezért $f_1 f_2'$ automorfizmus,

így f_1 felhasadó epimorfizmus.

Ezzel beláttuk, hogy f irreducibilis.

Az állítás második része azt mondja ki, hogy az irreducibilis leképezések pontosan a belről majdnem felhasadó, belminimális leképezések direkt komponensei.

Legyen tehát először: $f' : L \to M'$ irreducibilis.

Nyilván $M' \neq 0$. Így:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

Mivel f' nem felhasadó monomorfizmus, f pedig belről majdnem felhasadó, ezért $\exists h$:

$f' = hf$.

De f' irreducibilis, és f nem felhasadó monomorfizmus $\Rightarrow$ h felhasadó epimorfizmus $\Rightarrow$ $M'' = \mathrm{Ker}\, h$ olyan, hogy $M \cong M' \oplus M''$, továbbá a $q: M \longrightarrow M''$ vetítéssel: $f'' = qf : L \longrightarrow M''$, és $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}$.

Most megmutatjuk a megfordítást, azaz azt, hogy a balminimális balról majdnem fölhasadó morfizmusok komponensei irreducibilisek.

Tegyük tehát föl, hogy $f': L \longrightarrow M'$, melyhez $\exists f''$, $f'': L \longrightarrow M''$, melyre $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} : L \longrightarrow M' \oplus M'' \cong M$

Mutassuk meg, hogy f' is irreducibilis.

Tudjuk, hogy L direkt fölbonthatatlan, és f' nem izomorfizmus (különben $\begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}: L \longrightarrow M' \oplus M''$ fölhasadó mono lenne); így f' nem lehet fölhasadó epimorfizmus.

De fölhasadó monomorfizmus sem lehet, mert akkor $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}$ is fölhasadó monomorfizmus lenne: ha $\exists h: M' \to L$, hogy $hf' = 1_L$, akkor $(h, 0)\begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = 1_L$ miatt $\begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}$ is fölhasadó monomorfizmus lenne.

Azt kell még megmutatni, hogy f'-nek is csak triviális faktorizációja létezik.

T. föl: $\exists$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M' \\ & X \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd} \qquad f' = f_1 f_2$$

Tegyük föl, hogy f_2 nem felhasadó monomorfizmus.

Az előbbi diagramot a következőképpen egészíthetjük ki:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f=\binom{f'}{f''}"] \arrow[dr, "\binom{f_2}{f''}"'] & & M'\oplus M''=M \\ & X\oplus M'' \arrow[ur, "\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{M''}\end{pmatrix}"'] & \end{tikzcd}$$

Itt sem f_2, sem f'' nem felhasadó monomorfizmus (f'' komponense egy belülről majdnem felhasadó leképezésnek, így az előző gondolatmenet f''-re is alkalmazható), így az előző (5.12-es) Lemma alapján: $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}(f_2, id_L)\subseteq$ $\subseteq \operatorname{rad}(\operatorname{End} L)$ és $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}(f'', id_L)\subseteq \operatorname{rad}(\operatorname{End} L)$.

Ebben az esetben: $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\binom{f_2}{f_1}, id_L)\subseteq \operatorname{rad}\operatorname{End}(L)$, és ezért $\binom{f_2}{f''}$ sem felhasadó monomorfizmus.

Mivel $\binom{f'}{f''}=f$ belminimális, belülről majdnem felhasadó, ezért az előzőek szerint irreducibilis.

De most $\binom{f_2}{f''}$ nem felhasadó monomorfizmus, így $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{M''}\end{pmatrix}$ felhasadó epimorfizmus, és így $f_1: X\longrightarrow M'$ is felhasadó epimorfizmus.

Ezzel az 5.13-as tételt beláttuk. □

Elérkeztünk a fejezet legfontosabb fogalmához.

5.14. Def. $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ egzakt sorozat *majdnem felhasadó sorozat* (vagy *Auslander–Reiten-sorozat*), ha:

a) f balminimális, balról majdnem felhasadó és

b) g jobbminimális, jobbról majdnem felhasadó.

5.15. Állítás: Legyen $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ majdnem felhasadó. Ekkor:

a) a sorozat nem felhasadó (de egzakt);

b) L és N direkt felbonthatatlanok;

c) Ha $0 \to L \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \to 0$ is majdnem felhasadó, akkor $M' \cong M$ és $N' \cong N$, továbbá a két sorozat „izomorf", azaz van közöttük leképezés, ami izomorfizmus (és az első komponense 1_L).

d) A c) duálisa.

Biz. Az a) világos, mivel f nem felhasadó mono, g nem felhasadó epi.

b) következik az 5.4. Állításból.

c) következik az 5.3. Állításból:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\exists h"'] & N \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists k"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"'] & M' \arrow[r, "g'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists\, h$ izomorfizmus, és így $\exists\, k$ izomorfizmus.

<u>5.16. Lemma</u>: T. föl:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutatív diagram, a sorok egzaktak, nem fölhasadók. Ekkor:

a) Ha L direkt fölbonthatatlan, w automorfizmus $\Rightarrow$ u és v is automorfizmusok.

b) Ha N direkt fölbonthatatlan, u automorfizmus $\Rightarrow$ v és w is automorfizmusok.

<u>Biz.</u> Csak az a)-t igazoljuk.

Ha u nem izomorfizmus $\Rightarrow$ mivel $\mathrm{End}\, L$ lokális, ezért u nilpotens: $\exists m: u^m = 0$. Ekkor $v^m f = f u^m = 0$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$v^m f = 0$ tehát azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, v^m$, ezért v^m-et keresztül lehet vezetni $M/\mathrm{Im}\, f = M/\mathrm{Ker}\, g = N$-en:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v^m"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "w^m"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] & 0 \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\exists h: \; hg = v^m$

Ekkor $ghg = gv^m = w^m g$. Itt w^m izomorfizmus,

g pedig epimorfizmus, ezért gh izomorfizmus. Ez viszont ellentmond annak, hogy a sorozat nem felhasadó.
Ebből azt kapjuk, hogy u izomorfizmus, s az 5-lemma alapján v is izomorfizmus. □

Most megmutatjuk, hogy a majdnem felhasadó sorozatok definíciójában a feltételek nem mind függetlenek.

5.17. Tétel Ekvivalensek az alábbiak egy

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

rövid egzakt sorozatra:

a) a sorozat majdnem felhasadó;

b) L direkt felbonthatatlan, és g jobbról majdnem felhasadó;

c) N direkt felbonthatatlan, és f balról majdnem felhasadó;

d) f balminimális, balról majdnem felhasadó;

e) g jobbminimális, jobbról majdnem felhasadó;

f) L, N direkt felbonthatatlan, f és g irreducibilis.

Biz. a) ⇒ d), e) a definícióból

a) ⇒ b), c) a definícióból és 5.4-ből.

a) ⇒ f) az 5.13-ból.

Az alábbiakat mutatjuk meg: e) ⇒ b) és duálisa d) ⇒ c);

b) ⇒ c) és duálisa c) ⇒ b); b) & c) ⇒ a); f) ⇒ b)

Ezzel az ekvivalencia teljes lesz.

e) $\Rightarrow$ b): Az 5.13. Tétel alapján g irreducibilis, az 5.11. Következmény alapján pedig $L = \operatorname{Ker} g$ direkt fölbonthatatlan. Így e) $\Rightarrow$ b) nyilván.

d) $\Rightarrow$ c): Az előző duálisa.

b) $\Rightarrow$ c) Ekkor az 5.4. Állítás alapján azt kapjuk, hogy az N is direkt fölbonthatatlan. Így csak azt kell megmutatni, hogy az f balról majdnem fölhasadó. Mivel g nem fölhasadó epi, ezért f nem fölhasadó mono. Tegyük fel továbbá: $u: L \longrightarrow U$ olyan, hogy nincs kiterjesztése M-re:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "\nexists u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Megmutatjuk, hogy u fölhasadó monomorfizmus. Tekintsük a pushout diagramot:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "k"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Itt az alsó sor nem fölhasadó (mert u-nak $\nexists$ kiterj.), ezért k nem fölhasadó epi. De g jobbról majdnem fölhasadó, így $\exists V \xrightarrow{\bar v} M$, melyre $k = g\bar v$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\exists \bar{u}"] & V \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\bar{v}"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Itt $\bar{u} = \bar{v}|_U$

Az 5.16. Lemma miatt, mivel L direkt fölbonthatatlan, ezért $\bar{u}u$ (és $\bar{v}v$) automorfizmus lesz. Ez viszont azt jelenti, hogy u fölhasadó monomorfizmus.
Ezzel beláttuk, hogy f balról majdnem fölhasadó.

c) $\Rightarrow$ b) Az előző duálisa.

b) & c) $\Rightarrow$ a) Azt kell megmutatni, hogy f és g minimálisak.
Legyen $h \in \mathrm{End}\, M$ olyan, amelyre $hf = f$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ekkor az 5.16. Lemma miatt (N direkt fölbonthatatlan, 1_L izomorfizmus) k és így h is izomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy f balminimális.
Duálisa az is kijön, hogy g jobbminimális.

f) $\Rightarrow$ b) A föltevés szerint L direkt fölbonthatatlan, és azt is tudjuk, hogy g nem fölhasadó epimorfizmus (mert irreducibilis).

Legyen most $v: V \to N$ egy olyan morfizmus, ami nem fölhasadó epimorfizmus: szeretnénk ezt fölemelni egy $v': V \to M$ leképezéssé.

Nyilván föltehetjük, hogy V direkt fölbonthatatlan (mert külön-külön megcsinálhatjuk a komponensekre a fölemelést, feltéve, hogy direkt fölbonthatatlanokra ezt meg tudjuk csinálni; ha a V valamely összeadandójára vett megszorítás fölhasadó epimorfizmus lenne, akkor arra értelemszerűen $\exists$ fölemelés).

Most tehát ezt tudjuk, hogy V fölbonthatatlan és $f: L \to M$ irreducibilis. Ekkor az 5.10. Állítás miatt:

$$\begin{tikzcd} & & & V \arrow[dl, dashed, "\exists v'"'] \arrow[d, "v"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

vagy

$$\begin{tikzcd} & & & V \arrow[d, "v"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\exists v''"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ez utóbbi esetben, mivel g is irreducibilis, és v nem fölhasadó epi, ezért v'' fölhasadó mono. De V direkt fölbonthatatlan $\Rightarrow$ v'' izomorfizmus.

Ekkor viszont $v' = (v'')^{-1}$ jó lesz fölemelésnek.

Ezzel megmutattuk, hogy g jobbról majdnem fölhasadó. $\square$