Majdnem fölhasadó sorozatok létezése és konstrukciója.

Az Auslander–Reiten-eltolás

Az eddigiekből kiderült, hogy:

1) az irreducibilis morfizmusok, melyek direkt fölbonthatatlan modulusok között vannak elkeverve, bizonyos majdnem fölhasadó morfizmusok komponensei;

2) a majdnem fölhasadó sorozatok két végén direkt fölbonthatatlan modulusok vannak, s az egyik vége a sorozatnak egyértelműen meghatározza a másik végét (sőt tkp. a sorozatot magát is)

3) a 2)-es megjegyzés egy „majdnem bijektív" megfeleltetés létezését vetíti előre a direkt fölbonthatatlan modulusok között; konstrukció esetén ez a megfeleltetés esélyt adhat arra, hogy új direkt fölbonthatatlan modulusokat konstruáljunk, esetleg az összes ilyet megkaphassuk, ráadásul a majdnem fölhasadó sorozatok segítségével az irreducibilis morfizmusokat is föltérképezzük.

5.18. Def. (A „transzponálás") Legyen M tetszőleges A-modulus A-modban, $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ minimális projektív föloldás (eleje). Alkalmazzuk a $* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$ funktort:

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{p_0^*} P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \longrightarrow \mathrm{Coker}\, p_1^* \longrightarrow 0$$

Ekkor: $\mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Coker}\, p_1^*$ az M „transzponáltja". $\mathrm{Tr}\, M$ nyilván egyértelmű. Vegyük észre, hogy P_0^*, P_1^* projektív, és ha $M \in A\text{-mod} \Rightarrow \mathrm{Tr}\, M \in \mathrm{mod}\, A$.

5.19. Áll.: T. föl: $M \in A\text{-mod}$ direkt fölbonthatatlan.

(1) $\mathrm{Tr}\, M \in \mathrm{mod}\, A$, és $\mathrm{Tr}\, M$-nek nincs projektív direkt összeadandója

(2) Ha M nem projektív, akkor a

$$P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \mathrm{Tr}\, M \longrightarrow 0$$

minimális projektív föloldása $\mathrm{Tr}\, M$-nek.

(3) M projektív $\Leftrightarrow \mathrm{Tr}\, M = 0$. Ha M nem projektív, akkor $\mathrm{Tr}\, M$ direkt fölbonthatatlan, és $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}\, M) \cong M$.

(4) T. föl: M, N direkt fölbonthatatlan, nem projektív modulusok. Ekkor: $M \cong N \Leftrightarrow \mathrm{Tr}\, M \cong \mathrm{Tr}\, N$.

Biz.: (3) M projektív $\Rightarrow P_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Coker} p_1^* = 0 \Rightarrow \operatorname{Tr} M = 0$.

Ha $\operatorname{Tr} M = 0 \Rightarrow p_1^*$ epimorfizmus $\Rightarrow p_1^*$ felhasad (mert P_1^* projektív: $\operatorname{Hom}_A(Ae, A) \cong eA$, és $\operatorname{Hom}(-,A)$ additív) $\Rightarrow p_1$ felhasadó monomorfizmus (ugyanis $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0$, és $\operatorname{Hom}(-,A)$ dualitást indukál a projektív bal és jobb modulusok között) $\Rightarrow$ M projektív. Ezzel (3) első fele megvan.

T. most föl: M nem projektív. Ekkor az előbbiek alapján: $\operatorname{Tr} M \neq 0$. Nyilván:

$$P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

egy projektív feloldása $\operatorname{Tr} M$-nek. A kérdés: minimális-e. Ha nem minimális, akkor $\exists$ nem triv. felbontás:

$$E_0' \oplus E_0'' = P_0^* \xrightarrow{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}} E_1' \oplus E_1'' = P_1^* \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

és itt: $v: E_0'' \longrightarrow E_1''$ izomorfizmus, és $E_0' \xrightarrow{u} E_1' \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$ egzakt.

Alkalmazzuk erre a $*$ funktort:

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

adódik, és itt $P_1 = E_1'^* \oplus E_1''^*$, $P_0 = E_0'^* \oplus E_0''^*$, és

$$E_1'^* \xrightarrow{\mu^*} E_0'^* \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

projektív feloldás.

Az eredeti $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ minimalitása miatt ez csak úgy lehet, ha $E_1''^*, E_0''^* = 0$, azaz $E_1'', E_0'' = 0$. (Ismét használjuk, hogy E_i', E_i'' projektívek, és projektívekre $*$ dualitást ad).

Ezzel megvan (2) és (1).

Végezetül:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\wr\!\wr"] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\wr\!\wr"] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\,\cong"] & 0 \\
P_1^{**} \arrow[r, "p_1^{**}"] & P_0^{**} \arrow[r] & \operatorname{Tr}\operatorname{Tr} M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Az előzőek szerint a fenti ábra írható fel, ha M nem projektív $\Rightarrow$ $\operatorname{Tr}\operatorname{Tr} M \cong M$.

Ezzel (3) is megvan, hisz $X \overset{\oplus}{\cong} Y$ esetén $\operatorname{Tr} X \overset{\oplus}{\cong} \operatorname{Tr} Y$, így $\operatorname{Tr} M$ is direkt felbonthatatlan v. 0, ha M direkt felbonthatatlan.

Végezetül (4) következik a (3)-ból. □

5.20. Def: $M, N \in A\text{-mod}$ esetén legyen:

$$\mathcal{P}(M,N) = \{ f \in \operatorname{Hom}_A(M,N) \mid \exists\ \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd},\ P \text{ projektív} \}.$$

Ennek a duálisa:

$$\mathcal{I}(M,N)=\left\{ f\in \mathrm{Hom}_A(M,N) \;\middle|\; \exists \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & I \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd},\ I \text{ inj.} \right\}$$

Vagyis $\mathcal{P}(M,N)$ azokból az $M \to N$ homomorfizmusokból áll, amelyek keresztülvezethetők egy projektíven, $\mathcal{I}(M,N)$ pedig azokból, amik keresztülvezethetők egy injektíven.

5.21. Áll. $\mathcal{P}(M,N)$ „ideál" A-mod-ban, azaz zárt az összeadásra (ahol az értelmezhető) és a külső elemekkel való szorzásra. Ugyanígy $\mathcal{I}(M,N)$-re.

Biz. A szorzásra való zártság világos.

Az összeadás:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "g'"'] & & N \\ & P' \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f''"] \arrow[dr, "g''"'] & & N \\ & P'' \arrow[ur, "h''"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f'+f''"] \arrow[dr, "\binom{g'}{g''}"'] & & N \\ & P'\oplus P'' \arrow[ur, "(h'\ h'')"'] & \end{tikzcd}$$

5.22. Def. $A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} = A\text{-mod}/\mathcal{P}$, $\quad A\text{-}\overline{\mathrm{mod}} = A\text{-mod}/\mathcal{I}$.

Ezeket hívják projektíven stabil, ill. injektíven stabil moduluskategóriának („projectively stable", „injectively stable"). Az objektumok tehát Ob A-mod elemei, de:

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}}(M,N) := \underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) := \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$$

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}}(M,N) := \overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) := \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{I}(M,N).$$

(Végül tehát észre: A-$\underline{\mathrm{mod}}$-ban az A-beli projektívek, A-$\overline{\mathrm{mod}}$-ban pedig az A-beli injektívek válnak 0-objektummá: ezeket tehát kifaktorizáljuk $\mathcal{P}(M,N)$-nel, ill. $\mathcal{I}(M,N)$-nel, hogy ezt megtehessük.)

5.23. Állítás: Az $M \longrightarrow \mathrm{Tr}\, M$ megfeleltetés egy dualitás funktor A-$\underline{\mathrm{mod}}$ és $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ között.

Biz. Ez lényegében az 5.19-es állítás, de a részleteket most elhagyjuk.

5.24. Def. (Az Auslander–Reiten-eltolás) Az Auslander–Reiten-eltolás a Tr és a K-duális funktor, a D funktor kompozíciója:

$$\tau = D\,\mathrm{Tr} \quad (\text{AR-eltolt}) \qquad ; \qquad \tau^{-1} = \mathrm{Tr}\, D \quad (\text{inverz AR-eltolt})$$

Nyilván: τ, τ^{-1}: A-$\underline{\mathrm{mod}} \longrightarrow A$-$\underline{\mathrm{mod}}$, tehát most egyazon kategórián belül van egy megfeleltetésünk.

5.25. Def. $\nu: D\,\mathrm{Hom}_A(-,A) = D(-)^*$: A-mod $\longrightarrow$ A-mod az ún. Nakayama-funktor.

5.26. Áll.: ν ekvivalenciafunktor A-proj-ról A-inj-re; az inverze $\nu^{-1} = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$.

(projektívek) (injektívek)

Biz. (másképp) Tudjuk: $(-)^*$ dualitást ad A-proj és proj-A között (bal, ill. jobb projektívek A-modban, ill. mod-A-ban).

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy D dualitás mod-A és A-mod között, mely a projektíveket és az injektíveket egymásba viszi.

Kicsit konkrétabban: ha $e^2=e\in A$ idempotens, és $P_l(e)=Ae$ az e-hez tartozó bal projektív, $P_r(e)=eA$ a jobb projektív, s hasonlóan $I_l(e)$ és $I_r(e)$ a megfelelő injektívek (azaz: $I_l(e)=E(P_l(e)/\mathrm{rad}\,P_l(e))$, akkor a következőket kapjuk:

$$\nu(P_l(e)) = D\,\mathrm{Hom}_A(Ae, A) \cong D(eA) = D(P_r(e)) \cong$$
$$\cong I_l(e)$$

ill.:

$$\nu^{-1}(I_l(e)) = \mathrm{Hom}_A(DA, I_l(e)) \cong \mathrm{Hom}_A(DA, D(P_r(e)))$$
$$\cong \mathrm{Hom}_A(P_r(e), A) = \mathrm{Hom}(eA, A) \cong Ae = P_l(e)$$

5.27. Állítás: 1) $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ minimális proj. feloldás

$$\Rightarrow \exists\ 0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0 \text{ egzakt.}$$

2) $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$ minimális inj. kofeloldás

$$\Rightarrow \exists\ 0 \longrightarrow \nu^{-1}N \xrightarrow{\nu^{-1}i_0} \nu^{-1}E_0 \xrightarrow{\nu^{-1}i_1} \nu^{-1}E_1 \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$$

Biz. $\tau = DTr$ az Auslander–Reiten-eltolt,
$\tau^{-1} = Tr\, D$ az inverz eltolt.

1) Világos az eddigiekből. (D egzakt funktor)

2) Alkalmazzuk a $0 \to N \to E_0 \to E_1$ sorozatra a D és a $(\ )^*$ funktorokat:

előbb: $DE_1 \to DE_0 \to DN \to 0$ (min. proj. feloldás)

majd: $0 \to (DN)^* \to (DE_0)^* \to (DE_1)^* \to Tr\, DN \to 0$

a transzponált definíciójából.

De: $(DX)^* = \mathrm{Hom}_{A^{op}}(DX, A) \cong \mathrm{Hom}_A(DA, DDX) \cong$

$\cong \mathrm{Hom}(DA, X) = \nu^{-1}X$

Így az alábbi kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (DN)^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr\!\shortparallel"] & (DE_0)^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr\!\shortparallel"] & (DE_1)^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr\!\shortparallel"] & Tr\, DN \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \nu^{-1}N \arrow[r] & \nu^{-1}E_0 \arrow[r, "f"] & \nu^{-1}E_1 \arrow[r] & \mathrm{Coker} f \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\tau^{-1}N$

$\Rightarrow \mathrm{Coker} f \cong Tr\, DN = \tau^{-1}N$. □

5.28. Példa: Γ: $\overset{1}{\circ} \longleftarrow \overset{2}{\circ} \longleftarrow \overset{3}{\circ}$ $\qquad A = K\Gamma$

$A_A = 1 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1}$; $\qquad {}_AA = \substack{1\\2\\3} \oplus \substack{2\\3} \oplus 3$

$(DA)_A = \substack{3\\2\\1} \oplus \substack{3\\2} \oplus 3$

$\tau(3)$ kiszámolása: (megj.: τ a nem projektíveken ad használhatót, mivel $\mathrm{Tr}(P)=0$)

Vegyük a minimális projektív feloldást:

$$\begin{tikzcd} \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r, "p"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & 3 \arrow[r] & 0 \\ P(2) & P(3) & & \end{tikzcd}$$

Vegyük észre: $\nu(P(2)) = I(2)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tau(3) \arrow[r] & \nu(P(2)) \arrow[r, "\nu p"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \nu(P(3)) \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\nu p) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[r, "\nu p"] & 3 \\ & 2 & & \end{tikzcd}$$

Tehát: $\tau(3) = 2$

$\tau\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right)$ kiszámolása:

$$1 \to \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 0$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] & 3 \\ & \tau\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right) & & \end{tikzcd}$$

Tehát $\tau\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$

5.29. Állítás (összefoglaló). Legyenek M, N direkt felbonthatatlanok.

(1) $\tau M = 0 \iff M$ projektív

(1') $\tau^{-1} M = 0 \iff M$ injektív

(2) M nem projektív $\Rightarrow \tau M$ direkt felbonthatatlan, nem injektív, és $\tau^{-1}\tau M \cong M$.

(2') M nem injektív $\Rightarrow \tau^{-1} M$ direkt felbonthatatlan, nem projektív, és $\tau\tau^{-1} N \cong N$.

(3) M, N nem projektívek; $M \cong N \iff \tau M \cong \tau N$

(3') M, N nem injektívek; $M \cong N \iff \tau^{-1} M \cong \tau^{-1} N$.

5.30. Következmény: $A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \underset{\tau^{-1}}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$ inverz ekvivalenciák.

Biz. Köv 5.23-ból és az előbbiekből.

(Vegyük észre tehát: τ, τ^{-1} nem A-modba ad meg egy funktoriális ekvivalenciát, hanem $A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$ és $A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$ között.)

5.31. Tétel (AR-formulák) Legyenek $M, N \in A\text{-mod}$. Ekkor:

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}(N, \tau M)$$

és az izomorfizmusok természetesek mindkét változóban.

Biz. (elhagyjuk).

Most már kimondhatjuk a majdnem felhasadó sorozatok létezéséről szóló tételt:

5.32. Tétel (1) M direkt felbonthatatlan, nem projektív $\Longrightarrow$

$$\exists \quad 0 \to \tau M \to E \to M \to 0 \quad \text{majdnem felhasadó sorozat.}$$

(2) N direkt felbonthatatlan, nem injektív $\Longrightarrow$

$$\exists \quad 0 \to N \to F \to \tau^{-1} N \to 0 \quad \text{majdnem felhasadó sorozat.}$$

Megjegyzés: A tétel tehát azt mondja, hogy minden direkt felbonthatatlan modulussal – ha ez egyáltalán esélyes – végződik egy, ill. kezdődik egy majdnem felhasadó sorozat, és a sorozat két vége közötti (nem egészen funktoriális) kapcsolatot az AR-eltolás, ill. inverze adja.

Biz. Csak az (1)-et, és csak a konstrukciót adjuk meg.

Legyen M mint fönt. Az AR-formula (5.31. Tétel) alapján: tetszőleges L direkt felbonthatatlanra:

$$D\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(L, M) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M, \tau L)$$

(Ez működik akkor is, ha L projektív.)

Legyen: $S(L, M) = \mathrm{Hom}_A(L, M) / \mathrm{rad}_A(L, M)$

(itt $\mathrm{rad}_A(L, M)$-et korábban definiáltuk)

Vegyük észre: M nem projektív $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(L,M) \subsetneq \mathrm{rad}(L,M) \Rightarrow$

$\exists$ K-lineáris epimorfizmus $p_{L,M}: \underline{\mathrm{Hom}}(L,M) \to S(L,M)$,

és így $\exists$ K-lineáris monomorfizmus: $Dp_{L,M}: DS(L,M) \to D\underline{\mathrm{Hom}}_A(L,M)$

Mivel M direkt felbonthatatlan $\Rightarrow$ $\mathrm{End}\, M$ lokális $\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{End}}\, M$ is lokális.

Az előbbiek szerint: $\exists$: $p_{M,M}: \underline{\mathrm{End}}\,(M,M) \to S(M,M) =$

$= \mathrm{End}\, M / \mathrm{rad}\, \mathrm{End}\, M$.

Itt $S(M,M)$ az $\underline{\mathrm{End}}\, M$ egyszerű teteje mint $\mathrm{End}\, M$-modulus,

és $Dp_{M,M}$-mel a képe a $D\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,M)$ egyszerű talpa.

Legyen ξ' a $DS(M,M)$ egy nem nulla eleme, ξ a képe

$D\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,M)$-ben, azaz $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{AR-formula}}}{\cong} \mathrm{Ext}^1(M,\tau M)$-ben.

Ekkor a $\xi: 0 \to \tau M \to E \to M \to 0$ majdnem felhasadó.

Annak bizonyítását, hogy ξ majdnem felhasadó, elhagyjuk.

(Megjegyzés: A konstrukcióból látszik, hogy a majdnem felhasadó sorozatok nem egyértelműek, de egy egydimenziós tér nem nulla elemei mind a tagok izomorfak.)

5.33. Áll. (A projektívek, ill. injektívek esete)

(1) P direkt felbonthatatlan projektív.

$g: M \to P$ jobbról majdnem felhasadó jobbminimális

$\iff$ $g: \operatorname{rad} P \hookrightarrow P$

(2) I direkt felbonthatatlan injektív.

$f: I \to M$ balról majdnem felhasadó balminimális

$\iff$ $f: I \to I/\operatorname{soc} I$

Biz. Lényegében a 5.7. példában megvolt.

Megjegyzés: Ezzel $\forall$ direkt felbonthatatlanhoz találtuk balról ill jobbról majdnem felhasadó minimális leképezést, ami az adott modulusba végződik v. kezdődik: ezek tipikusan egy-egy majdnem felhasadó sorozatba vannak ágyazva, kivéve a fenti két esetet. Vegyük észre, hogy az 5.13. Állítás alapján ezzel az irreducibilis morfizmusokat is megkapjuk, ami egy adott modulusból indulnak ki, vagy ott végződnek. Sőt:

5.34. Áll: Legyen M direkt felbonthatatlan modulus. Ekkor csak véges sok olyan direkt felbonthatatlan L, N modulus létezik, hogy $\exists\ M \to L$ irreducibilis v. $\exists\ N \to M$ irreducibilis.

Biz. A majdnem felhasadó sorozatok tagjai is véges dimenziósak. □

A majdnem felhasadó sorozatokból még egy érdekes összefüggést kapunk:

5.35. Áll: (1) M direkt felbonthatatlan, nem projektív. Ekkor:

$$\exists f: X \to M \text{ irred.} \iff \exists f': \tau M \to X \text{ irred.}$$

(2) N dir. felb., nem inj. Ekkor:

$$\exists g: N \to Y \text{ irred.} \iff \exists g': Y \to \tau^{-1} N \text{ irred.}$$

Biz. A majdnem felhasadó sorozatok létéből következik.

5.36. Áll: Legyen P direkt felbonthatatlan, nem egyszerű projektív és injektív. Ekkor:

$$0 \to \operatorname{rad} P \to P \oplus \operatorname{rad} P/\operatorname{soc} P \to P/\operatorname{soc} P \to 0$$

majdnem felhasadó sorozat.

Biz. (Ellenőrizzük)

5.37. Def: A véges dim. alg. Γ (A-mod) az A AR-gráfja:

csúcsok: A-ind izomorfiaosztályai (dir. felbonthatatlanok)

élek: $\exists\, [M] \to [N]$ ir. él. $\iff$ $\exists\, M \to N$ irr. morfizmus.

(pontosabban: az $[M] \to [N]$ élek száma =

$$= \dim \left(\operatorname{rad}(M,N) / \operatorname{rad}^2(M,N)\right)$$

$$= \#\{i : 0 \to M \to \bigoplus_j N_j \to \tau^{-1} M \to 0 \text{ majdnem felh.}, \; N_i \cong N\}$$

Gyakorlaton!

$$= \#\{j : 0 \to \tau N \to \bigoplus_i M_i \to N \to 0 \text{ majdn. felh.} \; M_i \cong M\}.$$