6. A Brauer–Thrall-sejtések

<u>6.1. Sejtés</u> (B–T I. sejtés) Legyen A véges dimenziós algebra a K test fölött. Ha $\exists d \in \mathbb{N}$, hogy minden direkt fölbonthatatlan modulus dimenziója $\leq d \Rightarrow$ A repr. típusa véges.

<u>6.2. Sejtés</u> (B–T II. sejtés) Legyen A véges dimenziós algebra egy <u>végtelen</u> K test fölött. Ha A repr. típusa nem véges $\Rightarrow \exists\, d_1 < d_2 < \dots < d_n < \dots$ végtelen sorozat $\subseteq \mathbb{N}$, hogy $\forall i$-re végtelen sok páronként nem izomorf d_i-dimenziós A-modulus létezik.

<u>6.3. Megjegyzés:</u> A sejtések megfogalmazása időben a „ködbe vész", talán az 1940-es v. 50-es évekig nyúlik vissza (esetenként speciálisabb formában). Az első sejtést Roiter bizonyította 1968-ban; az itt következő bizonyítás Auslandertől származik 1976-ból. A második sejtésre Nazarova és Roiter publikáltak bizonyítást 1974-ben (K alg. zárt esetre), de a bizonyítás hibás volt. Bizonyítás perfekt testre Ringeltől (publikálatlan); Bautista–Gabriel–Roiter–Salmerón (1985)

6.4. Példák: A reprezentációvéges, ha:

1) A félegyszerű
2) A Nakayama-algebra ($\Leftrightarrow$ $\forall$ direkt felbonthatatlan bal, ill. jobb oldali projektív modulusnak egyetlen kompozíciólánca $\exists$)
3) KG csoportalgebra char $K = p$ esetén, ha G p-Sylow-ja ciklikus (Higman)

6.5. Példák: A reprezentációvégtelen, ha pl.:

1) $\Gamma: 1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2$, $A = K\Gamma$ (Kronecker-algebra)

$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix} \oplus 2$

Ha $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in K$: $M_{n,\lambda}: K^n \overset{I}{\underset{J_n(\lambda)}{\rightrightarrows}} K^n$ Ezek direkt felbonthatatlanok, különbözőek.

$J_n(\lambda)$ ↑ Jordan-blokk

Másik lehetőség: AR-gráf:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \left[\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix}\right. \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \cdots & \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 & & 1 & \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 \end{smallmatrix} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \cdots \\
\left[2\right. \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & \cdots & \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 & \\ 2 & & 2 & & 2 \end{smallmatrix} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

2-vel kezdődő A-R-sorozat:

$$0 \to 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 & \\ 2 & & 2 & & 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

Az itteni modulusok: $K^n \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} K^{n+1}$; $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

2) <u>Állítás:</u> Ha az A AR-gráfjában van többszörös él, akkor A repr. végtelen.

(T. föl: K alg. zárt. Ellenkező esetben a helyzet kicsit bonyolultabb.)

<u>Biz.</u> Ha M nem projektív:

$$[L] \underset{k \text{ db.}}{\rightrightarrows} [M] \iff$$

$$\iff 0 \to N = \tau M \to L^k \oplus L' \to M \to 0, \text{ ahol } L \not\subseteq_{\oplus} L'$$

$$\iff [N = \tau M] \underset{k \text{ db.}}{\rightrightarrows} [L]$$

T. most föl, hogy Γ(A-modban) $\exists$ legalább 2-szeres él:

$$[L] \rightrightarrows [M].$$

Tudjuk: $\dim_K L \neq \dim_K M$, hiszen $\exists$ irr. morfizmus $L \to M$, és ez mono v. epi, de nem izo.

Legyen pl. $\dim_K L > \dim_K M$

Ekkor nyilván M nem projektív, hiszen projektívbe csak a radikálból mennek irr. morfizmusok.

Ekkor $\exists \quad 0 \to \tau M = N \to L^2 \oplus \tilde{L} \to M \to 0$ AR-sorozat.

De itt: $\dim \tau M \geq 2\dim L - \dim M > \dim L > \dim M$, és

$[N = \tau M] \Rightarrow [L]$. Tovább indukcióval:

$\left.\begin{matrix} M, \tau M, \tau^2 M, \dots \\ L, \tau L, \tau^2 L, \dots \end{matrix}\right.$ nem projektívek, $\dim M < \dim \tau M < \dim \tau^2 M < \dots$

Ez végtelen sok direkt fölbonthatatlan modulust ad.

3) Γ véges gráf ir. kör nélkül, nem Dynkin $\Rightarrow$

$K\Gamma$ repr. végtelen. Pl.:
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \arrow[dl] \\ 1 & 3 \arrow[l] \\ & 4 \arrow[ul] \\ & 5 \arrow[uul] \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 & & & 5 \arrow[dl] \\ & 3 \arrow[ul] \arrow[dl] & 4 \arrow[l] & \\ 2 & & & 6 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$
stb.

Az Auslander–Reiten gráf néhány tulajdonsága

(A BT I. biz-hoz nem minden kell).

6.6. Emlékeztető: A véges dim. algebra, M direkt fölb., nem projektív; ekkor τM konstrukciója a következő:

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0 \qquad \text{min. proj. föloldás}$$

Alkalmazzuk a $\mathrm{Hom}_A(-, A) = (\ )^*$ funktort:

$$0 \to M^* \xrightarrow{p_0^*} P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \to \mathrm{Tr}\, M \to 0$$

Alkalmazzuk a $\mathrm{Hom}_K(-, K) = D$ funktort:

$$0 \to \tau M = D\,\mathrm{Tr}\, M \to DP_1^* \xrightarrow{Dp_1^*} DP_0^* \xrightarrow{Dp_0^*} DM^* \to 0$$

Itt $D(\ )^* = \nu$ a Nakayama-funktor, ami ekvivalenciát indukál a végesen generált projektívek kategóriája és a végesen generált injektívek kategóriája között, méghozzá úgy, hogy $DP^* = E(P/\mathrm{rad}\,P)$.

(injektív burok)

Hasonlóképpen: $\tau^{-1} N = \mathrm{Tr}\, D N$.

τ: Auslander – Reiten-eltolt

τ^{-1} inverz AR-eltolt.

6.7. Emlékeztető: $\Gamma(A\text{-mod})$ AR-gráf:

csúcsok: dir. felb. modulusok izomorfiaosztályai

ir. élek: irreducibilis morfizmusok (multiplicitással)

Extra struktúra a $\Gamma(A\text{-mod})$-on: τ eltolás:

τ: {nem projektívek} $\longrightarrow$ {nem injektívek}, melyre: bijekció

$$[\tau M] \xRightarrow{k \text{ db.}} [L] \iff [L] \xRightarrow{k \text{ db.}} [M]$$

Spec.: $[M]^- = \{[L] : \exists\, [L] \to [M]\} =$

$= \{[L] : \exists\, [\tau M] \to [L]\} = [\tau M]^+$

Az irreducibilis morfizmusokat a majdnem felhasadó sorozatok (leképezések) tartalmazzák, a gráf lokálisan véges.

Megmutatjuk, hogy az AR-gráfban a szomszédok dimenziói „összeadódnak"!

6.8. Állítás Legyen A véges dimenziós algebra K fölött. Ekkor $\exists\, c = c(A)$ konstans (A-tól függő), hogy: $X, Y \in A$-mod esetén ha $\exists\, [X] \longrightarrow [Y]$ inv. morfizmus, akkor:

$$l(X) \leq c \cdot l(Y) \quad \text{és} \quad l(Y) \leq c \cdot l(X)$$

(l itt a modulus kompozícióhosszát jelöli.)

Biz. Legyen $p = \max\{\, l(P) \mid {}_A P \text{ dir. fölb. projektív} \}$ és

$$q = \max\{\, l(Q) \mid Q_A \text{ dir. fölb. projektív} \}$$

Ilyen p, q létezik ($P \overset{\oplus}{\leq} {}_A A$, $Q \overset{\oplus}{\leq} A_A$), tehát pl. $p, q \leq l(A)$

Legyen most Z dir. fölb., nem projektív, és a min. proj. feloldása:

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Ha itt Z minden kompozíciófaktorát lefedjük egy dir. fölbonthatatlan projektívvel, akkor ebből kapunk egy $\bar{P} \longrightarrow Z \rightarrow$ epimorfizmust:

$L \leq M \leq Z$, $S := M/L$ egyszerű:

$$\begin{tikzcd} & & & P(S) \arrow[dl, dashed, "\exists \varphi"'] \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & M/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \exists\, \varphi : P(S) \longrightarrow Z.$$

Így: $\bar{P} = \bigoplus_{S \text{ legyfelle}} P(S) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ egzakt, és így

P_0, ami Z projektív fedője: $P_0 \overset{\oplus}{\leq} \bar{P}$.

Tehát: $\ell(P_0) \leq p \cdot \ell(Z)$.

Hasonlóan: P_1 legfeljebb $p \cdot \ell(Z)$ darab direkt felbonthatatlan direkt összege $\Rightarrow$ ugyanez igaz a

$P_1^* = \mathrm{Hom}_A(P_1, A)$-ra is $\Rightarrow$

$$\ell(P_1^*) \leq q \cdot p \cdot \ell(Z)$$

Mivel $\exists\ P_1^* \longrightarrow \mathrm{Tr}(Z) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$$\ell(\mathrm{Tr}\, Z) \leq q \cdot p \cdot \ell(Z)$$

Ezt a K-dualitás megőrzi $\Rightarrow$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \ell(\tau Z)}}{\ell(D\mathrm{Tr}\, Z)} \leq q \cdot p \cdot \ell(Z)$$

Hasonlóan: X dir. felb., nem injektív $\Rightarrow$

$$\ell(\tau^{-1}(X)) \leq q \cdot p \cdot \ell(X).$$

Ha most $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ AR-sorozat $\Rightarrow$

$$\ell(Y) = \ell(X) + \ell(Y) \leq (qp+1)\,\ell(Z)$$
$$\leq (qp+1)\,\ell(X)$$

Így tehát, ha Z nem projektív, $\exists [\tilde{Y}] \to [Z]$ irr. $\Rightarrow$

$\tilde{Y} \overset{\oplus}{\leq} Y$, és így: $\ell(\tilde{Y}) \leq (qp+1)\,\ell(Z)$.

Ha viszont Z projektív, $[\tilde{Y}] \to [Z]$ irreducibilis, akkor
$\tilde{Y} \overset{\oplus}{\leq} \operatorname{rad} Z \leq Z \Rightarrow l(\tilde{Y}) \leq l(X)$.

A másik irányú egyenlőtlenség hasonlóan jön ki. $\square$

Rátérünk a BT I. bizonyítására

6.9. Áll: Legyen A véges dimenziós algebra K fölött, X, Y direkt fölbonthatatlan A-modulus, $\operatorname{Hom}_A(X, Y) \neq 0$.
T. föl, hogy X és Y között nem létezik t-nél rövidebb irányított út X-ből Y-ba $\Gamma(A\text{-mod})$-ban.

Ekkor:

(1) $\exists\ X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \to \dots \xrightarrow{f_t} X_t \xrightarrow{g} Y$, hogy:

X_i dir. fölb., f_i irreducibilis (g nem fell.!),

és $g \circ f_t \circ \dots \circ f_1 \neq 0$.

(2) $\exists\ X \xrightarrow{f} Y_t \xrightarrow{g_t} Y_{t-1} \dots \to Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_0 = Y$, hogy

Y_i dir. fölb., g_i irreducibilis (f nem fell.!),

és $g_1 \circ \dots \circ g_t \circ f \neq 0$.

Biz: t-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk.
$t = 0$-ra nincs mit bizonyítani, mert föltettük: $\operatorname{Hom}_A(X, Y) \neq 0$.
T. föl, hogy tudjuk az állítást t-re, bizonyítsuk $t+1$-re.
Tehát: $\operatorname{Hom}_A(X, Y) \neq 0$, és $\nexists$ X-ből Y-ba $< t+1$ hosszúságú irányított út az AR-gráfban. Bizonyítsuk (1)-et.

Az indukciós föltevés szerint:

$$\exists \quad X_0 = X \xrightarrow{f_1} X_1 \to \dots \xrightarrow{f_t} X_t \xrightarrow{g} Y$$

X_i dir. felb., f_i irred., $g \circ f_t \circ \dots \circ f_1 \neq 0$.

Mivel $\nexists$ t hosszúságú ir. út, ezért g nem izomorfizmus.

<u>1. eset:</u> X_t injektív. Ekkor g nem injektív, ellenkező esetben ugyanis $X_t \cong g(X_t) \overset{\oplus}{\leq} Y$, és Y dir. felb. miatt $X_t \cong Y$, g izomorfizmus. ↯

Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Ker} g \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} g \supseteq \operatorname{Soc} X_t$

(hiszen $\operatorname{Soc} X_t = S$ egyszerű, mivel X_t dir. felb.)

Ekkor viszont g keresztülvezethető $X_t / \operatorname{Soc} X_t = Z$-n:

$$\begin{tikzcd} X_t \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r\end{pmatrix}"'] & & Y \\ & Z = \bigoplus Z_i = X_t/\operatorname{Soc} X_t \arrow[ur, "(g_1 \cdots g_r)"'] & \end{tikzcd}$$

$$g = (g_1 \cdots g_r)\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} g_i \alpha_i$$

és itt α_i-k irreducibilisek.

Ekkor: $0 \neq g \circ f_t \circ \dots \circ f_1 = \sum_{i=1}^{r} (g_i \alpha_i) \circ f_t \circ \dots \circ f_1 = \sum_{i=1}^{r} g_i \circ \alpha_i \circ f_t \circ \dots \circ f_1$

és itt ekkor $\exists i$: $g_i \circ \alpha_i \circ \dots \circ f_1 \neq 0$.

Válasszuk: $X_{t+1} = Z_i$, $f_{t+1} = \alpha_i$, $g' = g_i$ $\rightsquigarrow$

$$g' \circ f_{t+1} \circ \dots \circ f_1 \neq 0.$$

<u>2. eset</u> X_t nem injektív. Ekkor $\exists\ 0 \to X_t \xrightarrow{\alpha} Z \to Z' \to 0$

AR-sorozat, és itt $Z = \bigoplus_{i=1}^{r} Z_i$ dir. felb., $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r\end{pmatrix}$, α_i irr.

Tudjuk: $g: X_t \longrightarrow Y$ nem fölhasadó monomorfizmus (tehát g nem izomorfizmus, és Y direkt fölb.) $\Longrightarrow$

$$\exists\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_t \arrow[r, "\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}"] \arrow[d, "g"'] & \bigoplus Z_i \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{g}=(g_1,\dots g_n)"] & Z' \\ & Y & & \end{tikzcd}$$

ahol: $g = \sum g_i \alpha_i$

Mint az előbb: most is: $\exists i: g_i \circ \alpha_i \circ f_t \circ \dots \circ f_1 \neq 0$.

Ezzel az (1)-es bizonyítását befejeztük. A (2)-es bizonyítása az (1)-esének a duálisa. □

6.10. Megjegyzés: Az előző állítás jelentése: ha két modulus között létezik $\neq 0$ homomorfizmus, de nincsen köztük él az AR-gráfban, akkor a homomorfizmus mindkét végéről el lehet indulni, „közeledni" a másik felé az AR-gráfban úgy, hogy a megtett irr. lépések szorzata még ne legyen 0.

A következő lemma viszont épp azt mondja ki, hogy bizonyos feltételekkel az irreducibilis morfizmusok egymásutánja, ha elég sokat lépünk, mindenképpen 0 szorzatot ad.

6.11. Tétel (Harada–Sai-lemma)

Legyenek $X_1, \dots, X_{2^b}$ direkt felbonthatatlan modulusok, melyekre $l(X_i) \leq b$. T. fel: $f_i : X_i \to X_{i+1}$ nem invertálható. Ekkor:

$$f_{2^b-1} \circ f_{2^b-2} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = 0.$$

Bz. Kicsit többet mutatunk meg: n-re vonatkozó indukcióval igazoljuk, hogy ha $X_1, \dots, X_{2^n}$ mint fent, $f_i : X_i \to X_{i+1}$ nem izomorfizmus, akkor:

$$f = f_{2^n-1} \circ \dots \circ f_1 = 0 \quad \text{v.} \quad l(\operatorname{Im} f) \leq b-n.$$

(Ez $n = b$-re kiadja az elvárt eredményt.)

$n = 1$-re az állítás igaz:

$f_1 : X_1 \to X_{2^1}$ esetén

$l(\operatorname{Im} f_1) < b$, ellenkező esetben $l(X_i) \leq b$ miatt f_1 injektív és szürjektív lenne.

T. most fel n-re, bizonyítsuk $(n+1)$-re.

$$\underbrace{X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{2^n-1}} X_{2^n}}_{f} \underbrace{\xrightarrow{f_{2^n}}}_{g} \underbrace{X_{2^n+1} \xrightarrow{f_{2^n+1}} \dots \xrightarrow{f_{2^{n+1}-1}} X_{2^{n+1}}}_{h}$$

Legyen:

Indukcióval tudjuk: $f = 0$ v. $l(\operatorname{Im} f) \leq b-n$

$h = 0$ v. $l(\operatorname{Im} h) \leq b-n$

Ha most $f=0$ v. $h=0$ v. $l(\mathrm{Im} f) < b-n$ v. $l(\mathrm{Im}\, h) < b-n$ $\Rightarrow$ $h\circ g\circ f = 0$ v. $l(\mathrm{Im}(h\circ g\circ f)) \le b-n-1$.

T. fel tehát: $f\neq 0$, $h\neq 0$, $l(\mathrm{Im} f) = l(\mathrm{Im}\, h) = b-n$.

Ha $\mathrm{Ker}\, hg \cap \mathrm{Im} f \neq 0$ v. $\mathrm{Ker}\, h \cap \mathrm{Im}\, gf \neq 0$, akkor ismét készen vagyunk, mert ismét csökken a kép kompozíció hossza: $l(\mathrm{Im}\, hgf) < l(\mathrm{Im} f) = b-n$.

Vegyük észre: $l(\mathrm{Ker}\, hg) = l(X_{2^n}) - b + n = l(X_{2^n}) - l(\mathrm{Im} f)$

A fenti összefüggésből tehát azt kapjuk:

$$X_{2^n} = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, hg$$

Mivel X_{2^n} direkt felbonthatatlan, ezért $\mathrm{Ker}\, hg = 0$ ($\mathrm{Im} f \neq 0$ miatt). Ez azt jelenti, hogy g injektív.

Hasonlóképpen: $l(\mathrm{Im}\, gf) = b-n$ (egyébként megvagyunk), és $l(\mathrm{Ker}\, h) = l(X_{2^n+1}) - b + n = l(X_{2^n+1}) - l(\mathrm{Im}\, gf)$

Ezért: $X_{2^n+1} = \mathrm{Ker}\, h \oplus \mathrm{Im}\, gf$.

A direkt felbonthatatlanság miatt: $gf \neq 0$ esetén $\mathrm{Ker}\, h = 0$, és $\mathrm{Im}\, gf = X_{2^n+1}$, ezért g szürjektív.

Ekkor g izomorfizmus, ami ellentmondás. □

Az előző állítás tehát azt mondja ki, hogy ha az AR-gráf csúcsainak hossza kicsi, akkor nincs nagyon hosszú $\neq 0$ út.

6.12. Tétel (Auslander) Legyen A véges dimenziós algebra K fölött, A direkt felbonthatatlan mint gyűrű.

Ha az A AR-gráfjának van egy összefüggő komponense, amelyben $\forall$ modulusnak a kompozíciós hossza $\leq b$, akkor A repr. véges, és az a komponens a teljes AR-gráf (tehát $\forall$ dir. felb. modulus benne van.)

6.13. Következmény BT I. sejtés

Biz. Felhasználjuk a következőt:

A direkt felbonthatatlan mint gyűrű $\Longleftrightarrow$ $\forall P, P'$ direkt felbonthatatlan projektívre $\exists\, P = P_0, P_1, \ldots, P_t = P'$, hogy $\mathrm{Hom}(P_{i-1}, P_i) \neq 0$ vagy $\mathrm{Hom}(P_i, P_{i-1}) \neq 0$ $\forall i$-re.

Legyen tehát $\mathcal{C}$ a gráfnak az a komponense, amely teljesíti a fenti feltételeket.

Legyenek M, N direkt felbonthatatlan modulusok, melyekre $\mathrm{Hom}(M,N) \neq 0$. Megmutatjuk:

$$M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow N \in \mathcal{C}.$$

T.f.h.: $M \in \mathcal{C}$. Ha $N \notin \mathcal{C}$, akkor M és N távolsága az AR-gráfban $\forall t$-re nagyobb t-nél.

A 6.9. Állítás (1) része miatt: $\forall$ t-re:

$\exists$ $M = M_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t$ irreducibilis morfizmusok egy sorozata és egy $M_t \xrightarrow{g} N$ leképezés, melyre $g \circ f_t \circ \cdots \circ f_1 = 0$.

De a Harada–Sai-lemma miatt $f_t \circ \cdots \circ f_1 = 0$, ha $t > 2^b - 1$. $\lightning$

Hasonló ellentmondásra jutunk a 6.9.(2) alapján, ha azt tesszük fel: $M \notin \mathcal{C}$ és $N \in \mathcal{C}$.

Legyen most $M \in \mathcal{C}$, és válasszunk egy P projektívet, mely dir. felb., $\mathrm{Hom}(P, M) \neq 0$. (Ilyen van, mert M-nek $\exists$ projektív fedője.) Az előzőek szerint: $P \in \mathcal{C}$, és az első megjegyzés alapján (A összefüggősége miatt) $\forall P' \in \mathcal{C}$, ha P' dir. felb. projektív. Ekkor viszont $\forall M'$-re: $M' \in \mathcal{C}$, hiszen $\forall M'$ $\exists P'$ proj. $\mathrm{Hom}(P', M') \neq 0$.

Így $\mathcal{C} = A$-ind, azaz $\mathcal{C}$ minden direkt felbonthatatlan modulust tartalmaz.

Az is igaz: $\mathrm{Hom}(P, M) \neq 0 \Rightarrow M$ távolsága P-től $< 2^b - 1$.

De $\mathcal{C}$-ben csak véges sok projektív csúcs van, és az AR-gráf lokálisan véges $\Rightarrow \mathcal{C}$ véges.

Ezzel beláttuk, hogy A reprezentáció-véges $\square$