Alg. és számelm. 4 (tan.) **1. feladatsor** *2024. február 13-14.*

Gyűrűk, testek, kvaterniók

1. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}, \qquad \frac{3+2\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt[5]{5}}.$$

2. a) Igazoljuk, hogy az x^3-6x+1 polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
b) Mutassuk meg, hogy a polinomnak van egy α valós gyöke, amelyre $2<\alpha<3$.
c) Igazoljuk azt is, hogy csak egy ilyen α gyök van.
d) „Alfátlanítsuk” az $\dfrac{1}{1+\alpha}$ tört nevezőjét.

3. Írjuk föl az $1+2i+3j+4k$ kvaternió inverzét.

4. Oldjuk meg $\mathbb{H}$-ban az $x^2=1$, illetve az $x^2=-1$ egyenletet.

5. a) Teljesül-e a kvaterniók körében a $\overline{qr}=\overline{q}\cdot\overline{r}$ azonosság?
b) Ellenőrizzük, hogy $q,r\in\mathbb{H}$ esetén $\overline{qr}=\overline{r}\cdot\overline{q}$, majd ennek segíségével vezessük le, hogy $N(qr)=N(q)N(r)$.
c) Mutassunk rá mindenfajta számolás nélkül, hogy ha két egész szám felírható négy négyzetszám összegeként, akkor a szorzatuk is.
d) Bontsuk fel az $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+v^2)$ kifejezést két (lényegesen) különböző módon is négy kifejezés négyzetének összegére.

6. Legyen $\mathbb{E}=\left\{\dfrac{a+b\sqrt{3}\cdot i}{2}\mid a,b\in\mathbb{Z},\ a\equiv b \pmod 2\right\}$. Ellenőrizzük, hogy $\mathbb{E}$ a komplex számok testének egységelemes részgyűrűje (*Euler-egészek*). Keressük meg $\mathbb{E}$-ben az összes egységet.

7. a) Legyen $\mathbb{K}=\left\{\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z}\end{bmatrix}\mid z,w\in\mathbb{C}\right\}$ Igazoljuk, hogy $\mathbb{K}$ részgyűrű $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben.
b) Számítsuk ki $\mathbb{K}$ elemeinek determinánsát és inverzét is (ha van).
c) Igazoljuk, hogy $\mathbb{K}$ olyan ferdetest, ami nem test.

8. Módosítsuk a valós függvények gyűrűjét oly módon, hogy az összeadás továbbra is pontonként történjen (vagyis $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, a szorzást viszont a függvények kompozíciójával definiáljuk, vagyis az $(fg)(x)=(f\circ g)(x)$ előírással, Mely gyűrűaxiómák maradnak érvényben?

9. Mutassunk példát nullosztóra folytonos, illetve a differenciálható valós függvények gyűrűjében.

10. Tekintsük az $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$ mátrixot. Mutassuk meg, hogy azok a B valós mátrixok, melyekre $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, alteret alkotnak $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben. Hány dimenziós ez az altér?

11. Igazoljuk, hogy egy $0\neq A\in T^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor bal oldali nullosztó, ha nem invertálható. Hogyan következik ebből hasonló állítás jobb oldali nullosztókra?