Alg. és számelm. 4 (tanári) **2. feladatsor** *2024. február 20-21.*

Műveletttartó leképezések. A számfogalom fölépítése. Kvaterniók, egész számok

1. **a)** Keressük meg az egységeket és a nullosztókat a $\mathbb{Z}_{12}$ gyűrűben.

b) Hány egység, illetve nullosztó van a $\mathbb{Z}_{100}$ gyűrűben?

2. **a)** Ellenőrizzük, hogy minden r valós számra és q kvaternióra $rq = qr$ teljesül.

b) Igazoljuk, hogy minden $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ esetén van olyan $q' \in \mathbb{H}$, melyre $qq' \neq q'q$.

3. A $z = a + bi, w = c + di$ jelölés mellett legyen $\varphi\left(\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}\right) = a + bi + cj + dk$. Ellenőrizzük, hogy ez a $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{H}$ leképezés műveletttartó. (Itt $\mathbb{K}$ az 1. feladatsor 7. feladatában szereplő ferdetest, melynek elemei az olyan mátrixok, mint amilyenek a φ argumentumában szerepelnek.)

4. **a)** Mutassunk példát olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezésre, amely az összeadásra nézve műveletttartó, és a pozitív számokhoz negatív számokat rendel.

b) Legyen φ olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés, amely a szorzásra nézve műveletttartó. Igazoljuk, hogy ha $x \geq 0$, akkor $\varphi(x) \geq 0$.

5. **a)** Igazoljuk, hogy a kvaterniók vektorteret alkotnak a valós, illetve a komplex számtest fölött a megszokott műveletekre nézve. Melyik vektortérnek mennyi a dimenziója?

b) Érvényes-e ezekben a vektorterekben az $\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$ azonosság ($\lambda \in T$, $u, v \in V$)?

6. Az összeadás rekurzív definíciójából kiindulva igazoljuk, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{N}$ és $a+c = b+c$, akkor $a = b$.

7. A szorzás rekurzív definíciójából kiindulva igazoljuk, hogy a természetes számok halmazán a szorzás kommutatív és asszociatív. (Az összeadásról tanultakat itt már felhasználhatjuk.)

8. Igazoljuk, hogy a természetes számok halmazán a szorzás disztributív az összeadás fölött.

9. Az $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ halmazon vezessük be következő relációt: legyen $(a, b) \sim (c, d)$ akkor és csakis akkor, ha $a + d = b + c$. Ellenőrizzük, hogy ez egy ekvivalenciareláció.

10. Legyen az (a, b) és a (c, d) pár szorzata $(ac + bd, ad + bc)$.

a) Ellenőrizzük, hogy ha $(c, d) \sim (c', d')$, akkor $(a, b)(c, d) \sim (a, b)(c', d')$.

b) Vezessük be két ekvivalenciaosztály szorzatát, ellenőrizve azt is, hogy ez jól definiált.

c) Ellenőrizzük, hogy az összeadás nullelemét bármelyik osztállyal szorozva a nullelemet kapjuk.

d) Keressük meg az egységelemet a szorzásra nézve.