Alg. és számelm. 4 (tanári)) **4. feladatsor** *2024. március 5-6.*

Rendezett gyűrűk. Racionális és egész együtthatós polinomok számelmélete

1. Igazoljuk, hogy ha egy részbenrendezett gyűrűben $a, b \geq 0$ és $a + b = 0$, akkor $a = b = 0$.

2. Igazoljuk, hogy részbenrendezett gyűrűben egy pozitív és egy negatív szám szorzata mindig negatív, két negatív szám szorzata pedig pozitív. Mutassuk meg azt is, hogy egy egyenlőtlenséget negatív számmal szorozva annak iránya megváltozik.

3. Egy kommutatív, egységelemes, nullosztómentes R gyűrűnek legyen P olyan részhalmaza, amely nem tartalmazza a nullelemet, de zárt az összeadásra és a szorzásra nézve. Mutassuk meg, hogy R-en megadható olyan részbenrendezés, amelynek P a pozitivitástartománya.

4. Igazoljuk, hogy a racionális számok teste csak egyféleképpen rendezhető.

5. **a)** Legyen p páratlan prímszám. Hány eleme írható fel $\mathbb{Z}_p$-nek x^2 alakban?
b) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_p$-ben a -1 felírható $x^2 + y^2$ alakban.

6. Igazoljuk, hogy a $2x^3 + 6x^2 + 24x + 120$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Irreducibilis-e $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{Z}$ fölött?

7. Mutassunk példát olyan egész együtthatós polinomra, mely egy alkalmas prímszámmal teljesíti a Schönemann–Eisenstein kritérium feltételeit, de nem irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

8. Adjunk meg olyan n egész számot, amelyre $x^4 + nx + 12$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és olyat is, amelyre nem az.

9. **a)** Írjuk fel a $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{15}$ polinomot egy racionális szám és egy primitív polinom szorzataként.
b) Igazoljuk, hogy minden nullától különböző racionális együtthatós polinom felírható egy racionális szám és egy primitív polinom szorzataként, valamint ha $r_1 g_1 = r_2 g_2$ két különböző ilyen felírás, akkor $r_2 = -r_1$ és $g_2 = -g_1$.

10. **a)** Az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomhoz, ahol a_n és a_0 nem nulla, rendeljük hozzá az $f^*(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ polinomot. Igazoljuk, hogy ez a hozzárendelés művelettartó a szorzásra nézve.
b) Igazoljuk a Schönemann–Eisenstein kritérium következő ‘fordított’ változatát. Ha az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomhoz létezik olyan p prímszám, hogy p nem osztója a konstans tagnak, p osztója az összes többi együtthatónak, de p^2 nem osztója a főegyütthatónak, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
c) Igazoljuk, hogy a $20x^4 - 30x^2 + 10x - 21$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.