Alg. és számelm. 4 (tanári)) **5. feladatsor** *2024. március 12-13.*

$\mathbb{Z}[x]$ számelmélete. Körosztási polinomok

1. Osszuk el maradékosan az $x^4 + x^2 + 3x - 2$ polinomot az $x^2 - x + 1$ polinommal.

2. **a)** Hogyan lehet egyszerűen megállapítani, hogy egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti polinomnak van-e gyöke?
b) Keressük meg $\mathbb{Z}_2[x]$-ben a legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomokat.

3. **a)** Legyen $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$. Írjuk fel az $f(x + 6)$ polinomot.
b) Legyen R kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű, $f \in R[x]$, $c \in R$. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor irreducibilis R fölött, ha az $f(x + c)$ polinom irreducibilis.

4. Bontsuk fel az $x^4 + 1$ és az $x^4 + 4$ polinomokat $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára.

5. Igazoljuk, hogy az $x^4 + x^2 + x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

6. **a)** Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f = k > 0$. Tekintsük azokat az a egész számokat, melyekre $f(a) \in \{-1, 1\}$. Igazoljuk, hogy legfeljebb $2k$ darab ilyen szám van.
b) Legyen $h \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg h = n$. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ olyan különböző egész számok, melyekre $h(a_i)$ prímszám. Igazoljuk, hogy h irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

7. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző egész számok. Igazoljuk, hogy az

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

8. Számítsuk ki a Φ_{45} és a Φ_{168} körosztási polinomok fokszámát.

9. Írjuk fel a Φ_6, a Φ_8 és a Φ_{15} körosztási polinomokat.

10. Írjuk fel a Φ_9 és a Φ_{27} polinomokat, majd igazoljuk, hogy ezek irreducibilisek $\mathbb{Q}$ fölött. Mely körosztási polinomok irreducibilitását lehetne még belátni az általad talált módszerrel?