Irreducibilitás véges testek fölött. Algebrai és transzcendens elemek. Minimmálpolinom.

1. Keressük meg $\mathbb{Z}_2[x]$-ben a negyedfokú irreducibilis polinomokat, a többit pedig bontsuk fel irreducibilisek szorzatára.

2. Hány ötödfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$ fölött, és ezek közül hány lesz irreducibilis?

3. Jelöljön p egy prímszámot. Adott $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomhoz képezzük az $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomot úgy, hogy f minden együtthatóját helyettesítjük az általa reprezentált modulo p maradékosztállyal. Ily módon egy $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ műveletttartó leképezést kapunk.

a) Mutassuk meg, hogy ha $\deg \overline{f} = \deg f$ és $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. $\mathbb{Z}$ fölött is biztosan az lesz?

b) Mutassunk példát olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra, melyre $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, de f nem irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

4. Mutassuk meg, hogy a $3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 7x + 9$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ fölött.

5. Legyen $f = \Phi_p$. Mely p prímekre igaz, hogy $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött?

6. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$, f pedig olyan $\mathbb{Q}$ fölötti irreducibilis polinom, amelynek α gyöke. Mutassuk meg, hogy létezik $0 \neq c \in \mathbb{Q}$, amelyre cf éppen az α minimálpolinomja.

7. Az alábbiak közül melyik polinom minimálpolinomja valamely algebrai számnak?

a) $x^3 + 2x + 3$ **b)** $x^3 + 3x + 3$ **c)** $3x^3 + 3x + 1$

8. a) Mutassuk meg, hogy ha α algebrai szám, akkor $-\alpha$ és $\sqrt{\alpha}$ is az.

b) Igazoljuk, hogy π^2 transzcendens szám.

c) Ha α minimálpolinomja $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a + 0$, akkor mi a $-\alpha$ minimálpolinomja?

9. Írjuk fel $\sqrt[3]{3}$ minimálpolinomját.

10. a) Hozzuk egyszerűbb alakra az $(1 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4})(3 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ kifejezést.

b) Keressük meg $1 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ inverzét $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ alakban, ahol a, b, c racionális számok.

11. Legyen ε primitív 5-ödik egységgyök.

a) Írjunk fel olyan negyedfokú $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis polinomot, amelynek ε gyöke.

b) Írjuk fel az ε^4 és az $(1+\varepsilon)^{-1}$ számokat $a\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d$ alakban, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.