

Algebrai és transzcendens számok. Minimálpolinom. Testbővítés foka

1. Írjuk fel $\sqrt[26]{26}$ minimálpolinomját. Mennyi a $\sqrt[27]{27}$ szám foka?
2. Mennyi $\sqrt[4]{2}$ foka \mathbb{Q} , illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ fölött?
3. a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{1})$.
b) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.
4. Döntsük el, hogy $\sqrt{3}$ eleme-e a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ testnek.
5. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
6. Mutassuk meg, hogy $\sqrt[5]{5}$ nem eleme a $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ testnek. Mennyi a $K(\sqrt[5]{5})$ testbővítés foka K , illetve \mathbb{Q} fölött?
7. a) Mutassuk meg, hogy ha α n -edfokú algebrai szám, akkor $\sqrt[k]{\alpha}$ is algebrai szám, melynek foka legfeljebb nk .
b) Mutassunk példát $\alpha \notin \mathbb{Q}$ algebrai számra, amelyre $\deg \sqrt{\alpha} = 2 \deg \alpha$, és olyanra is, amelyre $\deg \sqrt{\alpha} = \deg \alpha$.
8. Igazoljuk, hogy π^2 , $\pi + 1$ és $\sqrt{\pi}$ is transzcendens szám.
9. a) Igazoljuk, hogy egy algebrai és egy transzcendens szám összege mindig transzcendens szám.
b) Mikor lesz egy algebrai és egy transzcendens szám szorzata algebrai?
10. Legyen α az $x^3 + 3x + 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke. Mi az α minimálpolinomja \mathbb{Q} fölött? Írjuk fel $\alpha^2 + 1$ négyzetét és inverzét is $a\alpha^2 + b\alpha + c$ alakban alkalmas a, b, c racionális számokkal. Keressük meg $\alpha^2 + 1$ minimálpolinomját \mathbb{Q} fölött.
11. a) Legyen ε primitív 5-ödik egységgyök. Mivel egyenlő $|\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}|$?
b) Igazoljuk, hogy ha ε primitív 5-ödik egységgyök, akkor $-\varepsilon$ primitív 10-edik egységgyök.
c) Számítsuk ki ennek alapján a 10-edik körosztási polinomot.
12. Legyen ε primitív 17-edik egységgyök és legyen $\lambda = 1 - \varepsilon$. Igazoljuk, hogy az $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{15}$ számok lineárisan függetlenek \mathbb{Q} fölött, $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{16}$ viszont összefüggők.