

Testbővítések. Többszörös gyökök és deriválás

1. Mennyi $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, illetve \mathbb{Q} fölött?
2. Határozzuk meg az $1 + \sqrt{2}i$ és a $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ algebrai számok fokát.
3. Legyenek c és d különböző négyzetmentes számok. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{c}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
4. Tegyük fel, hogy az a, b, c, d, r számok benne vannak \mathbb{R} valamely K résztestében, és az $y = ax + b$ egyenletű egyenes metszi az $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ egyenletű kört. Mutassuk meg, hogy a metszéspontok koordinátái benne vannak \mathbb{R} egy olyan résztestében, amely K -nak másodfokú bővítése.
5. Van-e többszörös komplex gyöke az $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ polinomnak?
6. Az R szokásos gyűrű fölötti $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom deriváltja legyen $f' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$.
 - a) Írjuk fel a definíciót a szummás jelölést használva.
 - b) Ellenőrizzük, hogy $(cf)' = cf'$ és $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
 - c) Igazoljuk, hogy $(fg)' = fg' + f'g$.
7. Vezessük le a láncszabályt is: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.
8. Legyen $f \in \mathbb{C}[x]$, $k \geq 1$. Igazoljuk, hogy ha α pontosan k -szoros gyöke f -nek, akkor f' -nek pontosan $(k-1)$ -szeres gyöke.
9.
 - a) *Ismétlés:* Legyen $\alpha = \cos x + i \sin x$. Az α^3 komplex számot kétféleképpen felírva vezessük le a $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ azonosságot.
 - b) Mutassuk meg, hogy $\cos 20^\circ$ harmadfokú algebrai szám.
10.
 - a) *Ismétlés:* Igazoljuk, hogy $1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \cos 288^\circ = 0$.
 - b) Mi lesz $\cos 72^\circ$ foka, illetve minimálpolinomja \mathbb{Q} fölött?
11.
 - a) Legyen p prímszám. Mutassuk meg, hogy az $x^p - x - 1$ polinomnak nincs gyöke \mathbb{Z}_p -ben.
 - b) Bizonyítsuk be, hogy az $x^p - x - 1$ polinom irreducibilis \mathbb{Z}_p fölött. (A megoldáshoz nem szükséges, de felhasználhatjuk, hogy létezik olyan p karakterisztikájú test, amely fölött a polinom gyöktényezők szorzatára bomlik.)