1. *Oldjuk meg a kvaterniók körében a $q(1+2j) = 5 - 10k$ egyenletet.*

Megoldás. *Első megoldás:* Tudjuk, hogy kvaternióknál is működik a reciprok számolására a komplex számoknál már megismert konjugálós trükk:

$$\frac{1}{1+2j} = \frac{1}{1+2j} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{1-2j}{5}.$$

Ekkor az eredeti egyenlet mindkét oldalát jobbról szorozva az $1 + 2j$ reciprokával, azt kapjuk, hogy:

$$q(1+2j) = 5 - 10k \ / \ (\ ) \cdot \tfrac{1}{1+2j}$$
$$q = (5 - 10k) \cdot \frac{1-2j}{5} = (1-2k) \cdot (1-2j) = 1 - 4i - 2j - 2k$$

Megjegyzés: Kvaternióknál általában nem beszélhetünk egyszerűen két kvaternió hányadosáról: ha q és r kvaterniók, akkor a q/r hányados definíciója nem világos, mivel a kvaternószorzás nem kommutatív: a q/r hányados egyaránt jelenthetné azt a számot, amire $(q/r) \cdot r = q$, vagy azt is, amire $r \cdot (q/r) = q$ teljesül. Ez viszont nem feltétlenül ugyanakkor teljesül, és ezért nem is szoktunk kvaterniótörteket írni. A reciproknál viszont nincs ilyen problémánk, mert a bal és a jobb oldali reciprok ugyanaz: ezért beszélhetünk $1/q$-ról.
Második megoldás: A q-t fölírhatjuk $(a + bi + cj + dk)$ alakban, és a formális szorzást elvégezve egyenletrendszert kapunk az ismeretlen együtthatókra:

$$(1 + bi + cj + dk)(1 + j2) = 5 - 10k$$
$$(a - 2c) + (b - 2d)i + (x + 2a)j + (d + 2b)k = 5 - 10k$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha a két oldalon a konstans tag, valamint az i-s, j-s és k-s tag együtthatója páronként megegyezik:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & - & 2c & & & = & 5 \\ & & b & & & - & 2d & = & 0 \\ 2a & & & + & c & & & = & 0 \\ & & 2b & & & + & d & = & -10 \end{array}$$

Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $a = 1$, $b = -4$, $c = -2$ és $d = -2$, vagyis a megoldás $q = 1 - 4i - 2j - 2k$.

2. *Mutassuk meg, hogy egy adott test fölötti 3×3-as mátrixok gyűrűjének részgyűrűjét alkotják az*

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$$

alakú métrixok. Nullosztómentes-e ez a gyűrű?

Megoldás. Azt, hogy az adott alakú mátrixok halmaza részgyűrűt alkot, azzal lehet megmutatni, hogy igazoljuk: az adott halmaz nem üres, és zárt a műveletekre (összeadás, kivonás, szorzás). Ha a nem ürességet pl. azzal igazoljuk, hogy a gyűrű nulleleme benne van az adott halmazban, akkor az összeadásra való zártság ellenőrzését megspórolhatjuk, és elegendő csak a kivonást és a szorzást ellenőrizni. De fontos tudnunk, hogy az összeadásra való zártság ellenőrzése nem pótolja a kivonásra (vagy az ellentettképzésre) való zártság ellenőrzését (mint ahogy részcsoportoknál is ellenőrizni kellett az inverzképzésre való zártságot is)!
Jelölje tehát $\mathcal{H}$ a megadott típusú mátrixok halmazát! Világos, hogy a nullmátrix ilyen alakú, tehát $\mathcal{H}$ nem üres. A következő számolások mutatják, hogy $\mathcal{H}$ zárt a fölsorolt műveletekre:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} a' & 0 & b' \\ 0 & c' & 0 \\ d' & 0 & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm a' & 0 & b \pm b' \\ 0 & c \pm c' & 0 \\ d \pm d' & 0 & e \pm e' \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$$
$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & 0 & b' \\ 0 & c' & 0 \\ d' & 0 & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bd' & 0 & ab' + be' \\ 0 & cc' & 0 \\ da' + ed' & 0 & db' + ee' \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$$

Vegyük észre, hogy a fönti következtetéseknél azt is használtuk, hogy az $a \pm a'$, illetve az $aa' + bd'$ vagy a cc' típusú elemek benne vannak a kiinduló alaptestben. Ezzel tehát beláttuk, hogy $\mathcal{H}$ részgyűrű.

A nullosztómentesség azt jelentené, hogy $\mathcal{H}$-beli nem nulla mátrixok szorzata nem lehet nulla. Persze, a nem nulla mátrixokban még lehet egy csomó nulla, ezért könnyű példát gyártani, ami azt mutatja, hogy $\mathcal{H}$ nem nullosztómentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \quad \text{esetén} \quad A \cdot B = 0, \quad \text{noha} \quad A, B \neq 0.$$

Megjegyzés: Fontos észrevennünk, hogy az $n \times n$-es mátrixok között (azaz az összes $n \times n$-es mátrix gyűrűjében) pontosan azok a mátrixok a nullosztók, amelyeknek a determinánsa 0. Itt most $\mathcal{H}$-nak nagyon sok nem nulla eleme olyan, hogy a datermnánsa 0. De ezek nem feltétlenül nullosztók, mert esetleg a nullosztópárjuk nem lesz benne $\mathcal{H}$-ban. Elvben tehát nem elegendő arra hivatkoznunk, hogy a $\mathcal{H}$-beli mátrixok egy jelentős részének nulla a determinánsa, és így vannak a gyűrűben nullosztók. (Hogy ez tényleg gondot jelenthet, azt pl. azoknak a 3×3-as mátrixoknak a példája mutatja, amelyeknek a harmadik sorában és harmadik oszlopában minden elem 0: ezek olyan részgyűrűt alkotnak, melyben minden elem determinánsa 0, ugyanakkor csak azok a mátrixok lesznek nullosztók, amelyekben a bal fölső 2×2-es aldetermináns nulla.)

3. *Gyűrűhomomorfizmus-e (vagyis művelettartó-e) az alábbi két $\varphi : R \to R$ leképezés?*
a) *$R = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\varphi(A) = A^T$;*
b) *R egy 2 karakterisztikájú test, $\varphi(a) = a^2$.*

Megoldás. a) A leképezés tehát: $\varphi\left(\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u & w \\ v & z \end{bmatrix}$. Könnyű számolás mutatja, hogy φ összegtartó. De erre most nincs is szükségünk, mivel φ nem tartja a szorzást. A transzponálás elemi tulajdonságai között ugyanis az szerepel, hogy $(AB)^T = B^T A^T$, ez utóbbi pedig nem feltétlenül egyenlő $A^T B^T$-tal. A sejtés megvan, most már csak egy példát kell mutatnunk, hogy bizonyítsuk: φ, azaz a transzponálás valóban nem szorzattartó. Ilyen példa lehet a következő:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{esetén } A^T B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B^T A^T.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy φ nem gyűrűhomomorfizmus.
b) A 2 karakterisztika azt jelenti, hogy $2x = 0$ minden $x \in R$-re, ezért $\varphi(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 = \varphi(a) + \varphi(b)$, tehát φ összegtartó. Hasonlóképpen, mivel R test, és így a szorzás kommutatív, ezért $\varphi(ab) = (ab)^2 = abab = a^2b^2 = \varphi(a)\varphi(b)$, tehát φ szorzattartó is. Ez mutatja, hogy φ gyűrűhomomorfizmus. (Vegyük észre, hogy itt nem lenne elegendő csak valami „hatványazonosság”-ra hivatkozni, hiszen nem kommutatív gyűrűben az $(ab)^2 = a^2b^2$ összeföggés nem feltétlenül igaz, vagyis a hatványazonosság már nem is hatványazonosság.)

4A. *Legyen P az R részbenrendezett gyűrű pozitivitási tartománya. Igazoljuk, hogy R pontosan akkor teljesen rendezett, ha minden $r \neq 0$ elemére $r \in P$ vagy $-r \in P$.*

Megoldás. Azt kell megmutatnunk, hogy a gyűrű tetszőleges $a \neq b$ elemeire vagy $a < b$, vagy $b < a$ teljesül. De az első összefüggés azzal ekvivalens, hogy $b - a \in P$, a másik pedig azzal, hogy $a - b \in P$. De mivel $b - a = -(a - b)$, és $a - b \neq 0$, ezért a feltétel szerint az egyik benne van P-ben. A gyűrű tehát teljesen rendezett.

vagy

4B. *A természetes számok halmazán definiáljuk a $*$ kétváltozós műveletet rekurzióval a következő módon: minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $m * 1 = m$, és $m * n^+ = (m * n)^+$. Igazoljuk, hogy a művelet asszociatív.*

Megoldás. *Első megoldás:* A Peano-axiómákat (PA) és azok közvetlen következményeit hasznáájuk. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$(*) \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$$

teljesül minden $a, b, c \in \mathbb{N}$-re. Megmutatjuk, hogy azon $c \in \mathbb{N}$ számok H-val jelölt halmaza, amelyekre az igaz, hogy minden a-ra és b-re teljesül vele a $(*)$ összefüggés, a teljes $\mathbb{N}$. Ezt indukcióval bizonyítjuk (azaz alkalmazzuk a megfelelő Peano-axiómát). Világos, hogy $1 \in H$:

$$(a * b) * 1 \overset{D}{=} (a * b) \overset{D}{=} a * (b * 1).$$

Itt D azt jelenti, hogy a $*$ művelet definícióját használjuk. Bizonyítsuk most be, hogy $c \in H$ esetén $c^+ \in H$ is teljesül: ekkor a teljes indukciós axiómaséma azt fogja eredményezni, hogy $H = \mathbb{N}$. De itt:

$$(a*b)*c^+ \stackrel{D}{=} \big((a*b)*c\big)^+ \stackrel{IH}{=} \big(a*(b*c)\big)^+ \stackrel{D}{=} a*(b*c)^+ \stackrel{D}{=} a*(b*c^+).$$

(IH az indukciós hipotézist jelenti.) Ezzel az asszociativitást beláttuk.
Második megoldás: A Peano-axiómarendszer segítségével már fölépítettük a természetes számok rendszerét az alapműveletekkel egyetemben. Így használhatjuk a szokásos tulajdonságokat, ha megfejtjük, mi is a megadott függvény. Igazoljuk tehát, hogy:

$$a*b = a+b-1.$$

Ezt indukcióval bizonyíthatjuk: $b = 1$-re $a*1 = a = a+1-1$, tehát erre teljesül a föltevésünk. b-ről $b^+ = b+1$-re:

$$a*b^+ \stackrel{D}{=} (a*b)^+ \stackrel{IH}{=} (a+b-1)^+ = (a+b-1)+1 = a+(b^+)-1.$$

Ezzel a képletet beláttuk. Innen az asszociativitás bizonyítása csupán egy rutin számolás a természetes számok körében:

$$(a*b)*c = (a+b-1)*c = a+b-1+c-1 = a+b+c-2$$
$$a*(b*c) = a*(b+c-1) = a+b+c-1-1 = a+b+c-2$$

Megjegyzés: Fölmerül a kérdés: mikor szabad használni a természetes számok szokásos tulajdonságait, és mikor vagyunk kötelesek a PA lépéseire szorítkozni? A válasz az, hogy az axiomatikus lépéseket mindig lecserélhetjük „magasabb szintű” érvekre, amint a használni kívánt lépéseket már bebizonyítottuk. Így pl. az $\mathbb{N}$-beli összeadás alaptulajdonságait már bátran használtuk az egész számok fölépítésénél. A PA ismertetésével nem az volt a célunk, hogy a magunk életét nehezítsük, hanem hogy biztosabb alapokra helyezzük a fogalmainkat, s ne azt kelljen elhinnünk, hogy a természetes számok szorzása kommutatív, mert az „tkp. látszik”, hanem valami alapvetőbbet (pl. hogy hogyan épülnek föl a számok az 1 ismételt összeadásából). Ettől függetlenül a mostani feladatban nem volt túl nehéz elemi eszközökore szorítkozni.

5. *Adjunk meg egy olyan a egész számot, melyre az $ax^5 + (a^2+5)x^2 + (a+5)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és egy olyat is, amelyre nem irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.*

Megoldás. Pl. $a = 1$-re a polinom $x^5 + 6x^2 + 6$, ami pl. a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt, $p = 2$ vagy $p = 3$ használatával irreducibilis $\mathbb{Q}$-ben. $a = 5$-re a polinom $5x^5 + 30x^2 + 10 = 5(x^5 + 6x^2 + 2)$, amiről látszik, hogy nem irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, hiszen az előbbi szorzatra bontás $\mathbb{Z}$ fölött nem triviális ($\mathbb{Z}[x]$ egységei csak a $+1$ és a -1). Érdemes észrevennünk, hogy az $a = 5$ esetben kapott polinom az első fetételnek is eleget tesz: az 5 kiemelése $\mathbb{Q}[x]$-ben nem számít, amúgy meg $p = 2$-vel itt is alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-kritérium, tehát a polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

6. *Számítsuk ki $\Phi_{12}(2)$ értékét.*

Megoldás. Használjuk a körosztási polinomok rekurzív képletét, valamint $\Phi_4(x) = (x-i)(x+i) = x^2+1$ explicit alakját:

$$\Phi_{12}(x) = \frac{x^{12}-1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)} = \frac{x^{12}-1}{(x^6-1)\Phi_4(x)} = \frac{(x^6-1)(x^6+1)}{(x^6-1)(x^2+1)} = x^4 - x^2 + 1.$$

Itt használtuk, hogy $x^{12} - 1 = (x^6-1)(x^6+1)$, illetve $x^6 + 1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$. És fontos volt észrevennünk, hogy a nevezőben szerelő tényezőket alkalmasan csoportosítva spórolhatunk a szorzáson is, vagy ami még lényegesebb, a polinomosztáson: $\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_6(x) = x^6 - 1$.

Mindenesetre ebből $\Phi_{12}(x) = 2^4 - 2^2 + 1 = 13$ adódik.
Megjegyzés: Mivel csak helyettesítési értéket kellett számolnunk, a polinomok maradékos osztása (vagy a középsikolából is ismert szorzattá bontós képletek alkalmazása) helyett a rekurzív képletet használhattuk volna eleve „behelyettesített” formában, s akkor csak egész számokat kellett volna osztanunk egymással. A jelen esetben valószínűleg a polinom kiszámolása nem volt túl nehéz, és áttakinthatőbbé tette a megoldást.