ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 4

9. előadás

Geometriai szerkeszthetőség

„Kedvenc" középiskolai feladataink:

- Szerkesszünk 60°-os szöget, 15°-os szöget, 12°-os szöget!
- Szerkesszünk egyenesre merőlegest egy adott pontba (v. pontból)
- Szerkesszünk egy egyenessel párhuzamos egyenest adott ponton át!
- Szerkesszünk érintőt egy adott pontból egy adott körhöz!
- Szerkesszük meg egy adott Δ köré írható kör középpontját!
- Szerkesszünk Δ-et, ha adva van a, β, γ!
- Szerkesszünk Δ-et, ha adva van a, α, m_a!
- Szerkesszünk Δ-et, ha adva van r, α, β!
- Szerkesszük meg egy kör középpontját, ha az nem adott!
- Szerkesszünk egy adott négyzettel egy kétszer akkora területű négyzetet!
- Szerkesszünk egy adott téglalappal vele azonos területű négyzetet!
- Szerkesszünk szabályos 6-szöget, 5-szöget, 9-szöget, ha adva van az oldalhossz (esetleg a körülírt kör sugara)!

Az euklideszi szerkesztés eszközei és lépései

<u>Eszközök:</u> 1 db egyenes vonalzó (beosztás nélkül)

1 db körző (elvileg korlátlanul képzeljük)

<u>Kiindulás:</u> alapelemek halmaza; általában adott legalább 2 pont

<u>Lépések:</u> ① Két adott vagy már megszerkesztett ponton át egyenest húzunk.

② Két adott vagy megszerkesztett (nem párhuzamos) egyenes metszéspontját kijelöljük

③ Két adott vagy megszerkesztett pont távolságával egy harmadik adott vagy szerkesztett pontból mint középpontból kör megrajzolása

④ Egy adott v. megszerkesztett egyenes és egy adott v. megszerkesztett kör metszéspontjának kijelölése

⑤ Két adott v. megszerkesztett kör metszéspontjának a kijelölése.

Vegyük észre: – nem engedjük meg vonalzó párhuzamos eltolásával párhuzamos felrajzolását;

– nem engedjük meg adott távolság felmérését, áthordását stb. beosztásos vonalzó segítségével;

– kört érintő egyenes érintkezési pontjának kijelölését, stb.

de ezek megszerkeszthetők euklideszi szerkesztéssel is, így valójában nem lényegesek.

<u>Euklideszi szerkesztés</u>: ①–⑤ lépések véges sorozata valamilyen kiinduló adathalmazból.

szerkeszthető pontok: amiket euklideszi szerkesztéssel megkaphatunk.

(Az egyszerűség kedvéért majd sokszor csak pontokról beszélünk: ilyenkor az egyenest helyettesítheti 2 pontja, a kört 3 pontja vagy a középpontja és egy tetszőleges pontja)

<u>Korlátozott szerkesztések</u>: – csak vonalzóval
– csak körzővel
– korlátos nyílású körzővel stb.

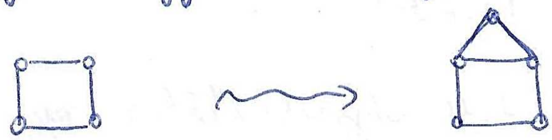
<u>Hogyan dönthető el egy feladatról hogy szerkeszthető-e?</u>

<u>Ha szerkeszthető</u>: elegendő egy ilyen eljárást (lépéssorozatot) megadni, ami a kívánt objektum pontjait megszerkeszti.

<u>Ha nem szerkeszthető</u>: ??? Nem tudjuk áttekinteni az összes lehetséges lépéssorozatot, mert ezek száma nem korlátos.

Egy példa egy korlátozott szerkesztés lehetetlenségére

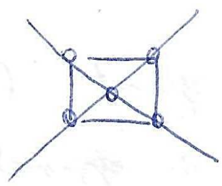
1) Adva van egy négyzet. Csak vonalzóval szerkesszünk a tetejére egy szabályos Δ-et:



Megmutatjuk, hogy a feladat csak vonalzóval nem megoldható. Ilyenkor ugyanis csak az 1-es és a 2-es szerkesztési lépéseket kell használni:

- új pontokat a 2-essel kaphatunk
- új egyeneseket az 1-essel kaphatunk.

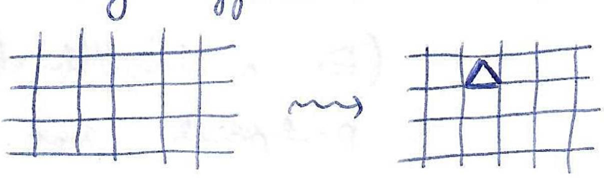
A kiinduló alakzatban minden metszéspont már ki van jelölve. Két új egyenest húzhatunk be: a két átló egyenesét. Ezzel egy új pontot jelölhetünk ki.



Több egyenest nem tudunk behúzni, és így több pontot sem kaphatunk!

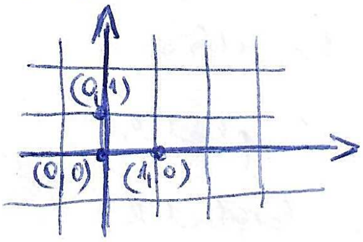
Vegyük észre: véletlen pontot nem vettünk föl a síkon, mert az befolyásolhatta volna a szerkeszthetőséget (pl. épp a Δ keresett csúcsát választanánk „véletlenül").

2) Az előbbi feladatban túl kevés pontból indultunk ki? Próbáljuk meg úgy, hogy adva van egy végtelen négyzetháló, és itt próbáljunk meg egyenlő oldalú Δ-et rajzolni az egyik oldalra:



Most eleve végtelen sok ponttal indulunk, így az ①-es lépéssel „sok" egyenest rajzolhatunk, a ②-es lépéssel pedig „sok" pontot jelölhetünk ki. Mégsem jutunk eredményre! Miért?

Rajzoljunk a megadott négyzethálóhoz egy koordinátarendszert, melynek tengelyei illeszkednek a rács egy-egy egyenesére:

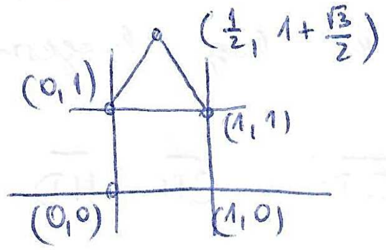


Vegyük fel a tengelyeken úgy a skálázást, hogy a négyzetek oldala 1 hosszú legyen.

Ekkor a négyzetháló pontjai — a kiinduló alakzat pontjai — pontosan azok a pontok, melyeknek a koordinátái egész számok. (ezek spec. racionális számok is egyúttal)

Ha most berajzolunk egy új egyenest (pl. (i,j) és (k,l) között), akkor annak az egyenesnek az egyenlete $Ax + By + C = 0$ egyenlettel írható le, és itt az együtthatókat a pontok koordinátáiból nyerhetjük racionális műveletekkel, tehát racionális számok lesznek, azaz VÁLASZTHATÓK racionális számnak. Ez igaz lesz bármely új (meg régi) egyenesre. Két egyenes metszéspontjának (ha az létezik) a koordinátái ily módon racionális számok lesznek. (Ez a későbbiekben is így marad: rac. koordinátájú pontpárok rac. együtthatós egyeneseket határoznak meg.)

Ez viszont azt jelenti, hogy az egyenlő oldalú Δ harmadik csúcsát nem tudjuk megkapni:



(Egyik (i,j) o——o $(i+1,j)$ oldalra sem tudjuk rátenni.)

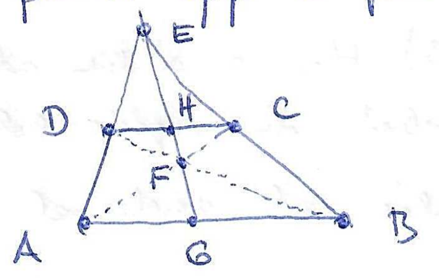
Itt tehát úgy mutattuk meg a szerkesztés lehetetlenségét, hogy nem mentünk végig az összes lehetőségen, de helyette megmutattuk, hogy mi az, amit elvileg kaphatunk. Találtunk valamilyen „INVARIÁNST": minden szerkeszthető pontnak racionálisak a koordinátái.

A továbbiakban ezt az ötletet gondoljuk végig az euklideszi szerkesztések esetében.

<u>Megjegyzés</u>: Hogy a csak vonalzós szerkesztések nem teljesen érdektelenek, mutatja az alábbi feladat:

Adott egy általános trapéz (ami nem paralelogramma). Szerkesszük meg csak vonalzóval az alapok felezőpontját! (Szakaszfelezéseket általában később is használunk.)

<u>Megoldás</u>: Keressük meg a szárak metszéspontját és az átlók metszéspontját. Kössük össze a két pontot, és jelöljük ki a metszéspontját az alapokkal. Ezek a pontok épp a felezőpontok:



ABCD trapéz
E szárak metszéspontja
F átlók metszéspontja
G, H az EF egyenes metszete AB-vel, ill. CD-vel.

Miért lesz G, ill. H felezőpont?

Vegyük észre: ABF △ hasonló CDF △-höz, sőt, a hasonlóság nyilván még úgy is, hogy kiegészítjük az FG ill. FH szakaszokkal.

MESE

Ez azt jelenti, hogy $\overline{AG}:\overline{GB} = \overline{CH}:\overline{HD}$ (*)

De hasonlók az ABE és a DCE △-ek is (szintén kiegészítve őket az EG és EH szakaszokkal), így:

$\overline{AG}:\overline{GB} = \overline{DH}:\overline{HC}$ (**)

(*)-ot és (**)-ot összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$\overline{CH} = \overline{HD}$ és $\overline{AG} = \overline{GB}$.

Megjegyzés 2. Bármilyen meglepő, ha csak körzőnk van, azzal minden euklideszi szerkesztést meg tudunk csinálni (feltéve, hogy nem ragaszkodunk az egyenesek „megrajzolásához", csak meghatározásukhoz: egy egyenest megszerkesztettnek tekintünk, ha adva van két pontja):

Tétel (Mohr–Mascheroni, 1672, 1797) Minden euklideszi szerkesztés vonalzó nélkül, azaz csak körzővel is elvégezhető.

MESE

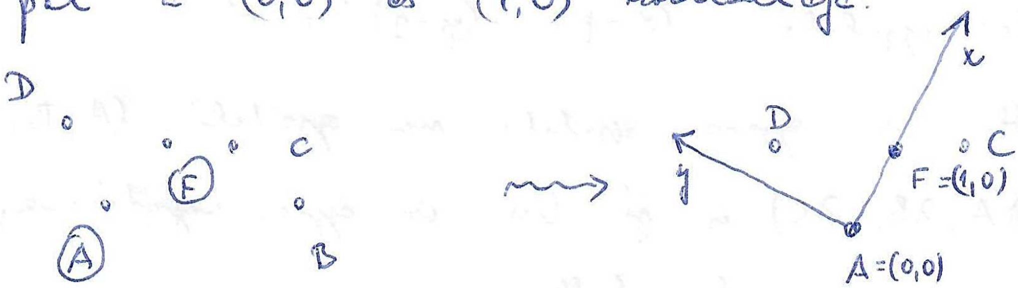
A bizonyítás az inverziót használja, amely az egyeneseket körökbe viszi át.

Láttuk: csak vonalzóval viszonylag egyszerű euklideszi szerkesztések sem valósíthatók meg, de igaz az alábbi tétel:

Tétel (Poncelet–Steiner, 1822, 1833) Ha a síkban adva van egy kör a középpontjával, és szabad ún. segédpontokat felvenni, akkor minden euklideszi szerkesztés csak vonalzóval is elvégezhető.

Térjünk vissza az euklideszi szerkesztésekhez!

Láttuk az előbb, hogy milyen hasznos lehet egy „nem-szerkeszthetőségi" bizonyításnál, ha koordinátageometriai eszközökkel „egyszerűsíthetjük" a feladatot. Fontos azonban, hogy a koordinátarendszer fölvételével ne csempésszünk be újabb adatokat a feladatba, csak olyasmit, ami úgy is megszerkeszthető lenne. Pl. megadott kiinduló pontok esetén kiválaszthatunk tetszőleges két pontot, ebben megszerkeszthető az a koordinátarendszer, melyben a kiválasztott két pont a (0,0) és (1,0) koordinátájú:



A tengelyek, az egész koordinátájú pontok megszerkeszthetők.

Tegyük föl tehát, hogy van egy szerkesztési feladatunk kiinduló adatokkal (pontokkal). Vegyünk föl egy koordinátarendszert a tengelyek és az (1,0) pont kijelölésével úgy, hogy (0,0) és (1,0) már adott pontok voltak. (Megmutatható, hogy a további eredményeink nem függnek attól, melyik két kiinduló pontot választottuk a koordinátarendszer alappontjainak). Vegyük a kiindulásul adott pontok koordinátáit az adott rendszerben: $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$

(Vegyük észre: adott koordinátatengelyek és adott (a, b) pont mellett megszerkeszthetők az $(a, 0)$ és $(0, b)$ projekciók a tengelyeken).

Jelölje K_0 azt a résztestet $\mathbb{R}$-ben, melyet az így kapott koordináták generálnak:

$$K_0 = \mathbb{Q}(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots) \leq \mathbb{R}.$$

{ K_0-t nevezzük az alapadatok által generált résztestnek.

Hogyan koordinátázhatjuk az egyéb objektumokat?

Egyenes egyenlete: $Ax + By + C = 0$

Kör egyenlete: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

Itt az egyenes egyenlete nem egyértelmű: (A, B, C) esetén $(\lambda A, \lambda B, \lambda C)$ is jó lesz az egyenes megadására, így erre majd vigyázni kell.

Az itt szereplő A, B, C, p, q, r számokat nevezzük az alakzatok koordinátáinak.

A továbbiakban abból indulunk ki, hogy adva van egy ponthalmaz ($\rightsquigarrow$ K_0 az alapadatok által generált résztest), majd az ①–⑤ szerkesztési lépésekkel újabb pontokat, egyeneseket, köröket adunk meg, és nézzük az így kapott új objektumok koordinátáit, és megnézzük, mit mondhatunk ezekről.

Azt fogjuk belátni, hogy nem keletkezhetnek akármilyen új számok.

<u>Tétel</u> Tegyük föl, hogy a szerkesztés egy adott pillanatában meglevő pontok, egyenesek és körök koordinátái

(eleve adott vagy menetközben szerkesztett)

benne vannak egy $K \leq \mathbb{R}$ testben.

Ha most alkalmazzuk az euklideszi szerkesztés ①-⑤ lépéseinek valamelyikét, akkor kapunk egy új pontot, egyenest v. kört. Ezen új objektum koordinátái vagy szintén benne vannak K-ban, vagy egy olyan $K_1 \leq \mathbb{R}$ testben, melyre $K \leq K_1$, és K_1 másodfokú bővítése K-nak (tehát $K(\sqrt{d})$, $d \in K$ alakú). Egyenesek esetén a koordináták választhatók ily módon.

<u>Biz.</u> (vázlat) ① Egyenes 2 ponton át. Ha a pontok koordinátái K-ban vannak, akkor a megfelelő átmenő egyenes egyenlete ezekből rac. műveletekkel $(+, -, \cdot, /)$ kifejezhető $\Rightarrow$ A, B, C választható K-belinek.

② Egyenesek metszéspontja:
$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Ha $A_i, B_i, C_i \in K$, és $\exists$ metszéspont $\Rightarrow$ a megoldás is benne van K-ban. (Lin. egyenletrendszer megoldása)

③ Kör megrajzolása egy adott pont körül, két másik pont távolságával mint sugárral
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

Itt $p, q \in K$, mivel adott pont körül szerkesztjük a kört. Két K-beli koordinátájú pont távolsága viszont a Pitagorasz-tétellel számolható: $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ a pontok, ekkor $r = \sqrt{\underbrace{(p_2-p_1)^2 + (q_2-q_1)^2}_{d \in K}}$

Tehát $r \in K(\sqrt{d})$

(4) Egyenes és kör metszéspontja:

$$\left.\begin{aligned} (x-p)^2 + (y-q)^2 &= r^2 \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszer megoldását keressük

Az egyenes egyenletéből valamelyik változót kifejezzük a másikkal, és ezt behelyettesítjük az elsőbe: a megoldás egy másodfokú egyenlet gyöke így K-beli számokból kifejezhető esetleg egy $\sqrt{d}$ hozzávételével

(5) Két kör metszéspontja

Visszavezethető a (4)-esre:

$$\left.\begin{aligned} \text{I.}\quad (x-p_1)^2 + (y-q_1)^2 &= r_1^2 \\ \text{II.}\quad (x-p_2)^2 + (y-q_2)^2 &= r_2^2 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} &\text{I.} \\ &\text{I.} - \text{II.} \end{aligned}$$

Itt I. − II. egy olyan egyenlet, melyből kiesik x^2 és y^2

$\Rightarrow$ x, y-ban lineáris egyenlet így egyenes egyenlete.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Mit jelent ez több lépés esetén?

<u>Tétel</u>: T. fel: K_0 az adott szerkesztési feladat alapadatai által generált test. Ha a (p,q) pont szerkeszthető az adatokból, akkor: van olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan

$$K_0 \le K_1 \le K_2 \le \dots \le K_n \le \mathbb{R}$$

testlánc, hogy $p, q \in K_n$, és $\forall i$-re $|K_{i+1} : K_i| = 2$, azaz az egymást követő bővítések foka 2.

<u>Biz.</u> Az előző tételből nyilvánvaló. $\square$

Ebből viszont egy nagyon fontos <u>SZÜKSÉGES</u> feltételt kapunk egy (p,q) pont szerkeszthetőségére:

<u>Következmény</u>: Legyen K_0 az alapadatok által generált test. Ha a (p,q) pont <u>szerkeszthető</u>, akkor p és q algebrai K_0 felett, és a foka 2-hatvány.

<u>Biz.</u> Az előző tétel alapján: $|K_n : K_0| = 2^n \Rightarrow$

$p, q \in K_n$ miatt $gr_{K_0} p \mid 2^n$, $gr_{K_0} q \mid 2^n$. $\square$

<u>Def.</u>: $a \in \mathbb{R}$ szerkeszthető szám (adott alapadatok mellett), ha $(a, 0)$ szerkeszthető.

Nyilván: (a, b) szerkeszthető $\Leftrightarrow$ a, b szerkeszthető.

<u>Köv.</u>: $a \in \mathbb{R}$ szerkeszthető K_0 felett $\Rightarrow$ $gr_{K_0} a = 2^k$.

<u>Vigyázat!</u> A feltétel csak szükséges feltétele a szerkeszthetőségnek!

Klasszikus szerkesztési problémák

① (Déloszi feladat) Kockakettőzés: adott élű kockához szerkesszük meg annak a kockának az élét, amelynek a térfogata az eredetinek a kétszerese.

Adva van a kocka éle: az egy szakasz: A —— B

Úgy vesszük föl a koordinátarendszert, hogy

$A = (0,0)$, $B = (1,0)$ legyen.

Ekkor: $K_0 = \mathbb{Q}$, és a kiinduló kocka élhossza 1.

Feladat: szerkesztendő $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakasz $\overset{③}{\Longleftrightarrow}$ a ③-as lépéssel: szerkesztendő a $(\sqrt[3]{2}, 0)$ pont.

De $\sqrt[3]{2}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 3 (minimálpolinomja: x^3-2)

$\Longrightarrow$ $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető ($\Longrightarrow (\sqrt[3]{2}, 0)$ nem szerkeszthető).

② Körnégyszögesítés: Szerkesztendő adott sugarú körrel egyező területű négyzetet.

(Nyilván ez ugyanaz, mintha a négyzet oldalának megszerkesztését kérnénk.)

Adva van: a kör sugara mint szakasz: A —— B

Koordinátarendszer felvétele: $A = (0,0)$, $B = (1,0)$,

és így a kör területe $r^2\pi = \pi$.

A feladat: szerkesszük $\sqrt{\pi}$ hosszúságú szakaszt

($\Longleftrightarrow$ szerkesszük meg a $(\sqrt{\pi}, 0)$ pontot). De $\sqrt{\pi}$ transzcendens

$\Longrightarrow$ nem szerkeszthető.

(3) Szögharmadolás: Szerkesszük meg egy adott szög harmadát!

Ennek a feladatnak a megoldása függ a szögtől:
pl.: 180°-os szöget tudunk harmadolni (⇝ 60°)

Függhet attól is, hogy milyen adatokkal van a szög megadva (ha pl. két egyenes van megadva 2-2 ponttal, esetleg a szög csúcsa 1-1 ponttal a szög szárain, „speciális" távolságra a csúcstól ⇝ esetleg megszerkeszthető a szög harmada).

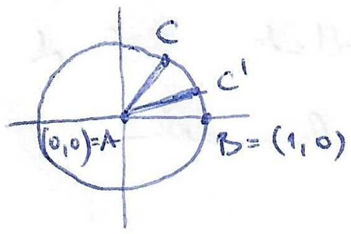
Standard megadás: kör középpontja, valamint két pont a körön. (Ilyen bármilyen megadás esetén is tudunk szerkeszteni.)

Megmutatjuk, hogy 60° nem harmadolható, azaz 20°-ot nem tudunk szerkeszteni (ha adva van egy 60°-os szög).

60°-hoz tkp elegendő egyetlen szakasz megadása (⇝ egyenlő oldalú Δ szerkeszthető):

A szokásos módon: alaptestünk: $\mathbb{Q}$

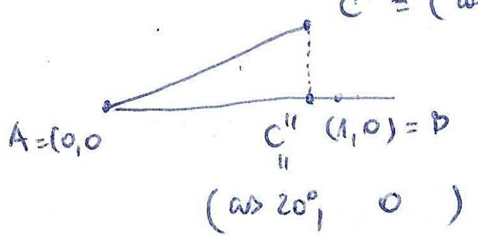
Ha tudnánk 20°-ot szerkeszteni ⟹



$CAB\sphericalangle = 60°$; C' szerkeszthető, ahol $C'AB\sphericalangle = 20°$

⟹ C''-t is meg tudjuk szerkeszteni
⇕
$\cos 20°$ szerkeszthető.

$C' = (\cos 20°, \sin 20°)$



$C'' = (\cos 20°, 0)$

De egyszerűen bizonyítható az alábbi trigonometrikus összefüggés:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

(A bizonyításhoz alkalmazhatjuk a Moivre-formulát:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi \;)$$

Mivel $\cos 60° = \frac{1}{2}$, ezért:

$$\frac{1}{2} = 4\cdot\cos^3 20° - 3\cos 20°$$

Tehát $\alpha = \cos 20°$-ra:

$$8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$$

Vagyis $\cos 20°$ gyöke az $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ polinomnak.

A racionális gyöktesztttel igazolhatjuk, hogy $f(x)$-nek $\nexists$ racionális gyöke $\Rightarrow$ ($f(x)$ 3-adfokú, így) $f(x)$ irred. $\mathbb{Q}[x]$-ben.

$\Rightarrow$ $\cos 20°$ harmadfokú algebrai szám $\Rightarrow$ nem szerkeszthető.

Ezzel igazoltuk, hogy a szögharmadolásra nemcsak hogy nincs univerzális eljárás, de konkrétan $60°$-ot sem tudunk euklideszi szerkesztéssel harmadolni.