

1. Oldjuk meg a kvaterniók körében a  $q(1 + 2j) = 5 - 10k$  egyenletet.
2. Mutassuk meg, hogy egy adott test fölötti  $3 \times 3$ -as mátrixok gyűrűjének részgyűrűjét alkotják az

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok. Nullosztómentes-e ez a gyűrű?

3. Gyűrűhomomorfizmus-e (vagyis művelettartó-e) az alábbi két  $\varphi : R \rightarrow R$  leképezés?
  - a)  $R = \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $\varphi(A) = A^T$ ;
  - b)  $R$  egy 2 karakterisztikájú test,  $\varphi(a) = a^2$ .
- 4A. Legyen  $P$  az  $R$  részbenrendezett gyűrű pozitivitási tartománya. Igazoljuk, hogy  $R$  pontosan akkor teljesen rendezett, ha minden  $r \neq 0$  elemére  $r \in P$  vagy  $-r \in P$ .

*vagy*

- 4B. A természetes számok halmazán definiáljuk a  $*$  kétváltozós műveletet rekurzióval a következő módon: minden  $m, n \in \mathbb{N}$  esetén legyen  $m * 1 = m$ , és  $m * n^+ = (m * n)^+$ . Igazoljuk, hogy a művelet asszociatív.
5. Adjunk meg egy olyan  $a$  egész számot, melyre az  $ax^5 + (a^2 + 5)x^2 + (a + 5)$  polinom irreducibilis  $\mathbb{Q}$  fölött, és egy olyat is, amelyre nem irreducibilis  $\mathbb{Z}$  fölött.
6. Számítsuk ki  $\Phi_{12}(2)$  értékét.