MATEMATIKUS MESTERSZAK: ZÁRÓVIZSGAKÉRDÉSEK SZAKMAI TÖRZSANYAG

A szakmai törzsanyagból a záróvizsgára **3 témakörből** legalább **15 kreditnyi**, a teljes záróvizsgára legalább **40 kreditnyi** anyagot kell kiválasztani.

KÖTELEZŐEN VÁLASZTHATÓ

B1. A sokaságok differenciálgeometriája (BSc) (kredit: 3+3) – *Verhóczki László*
Témakör: KÖTELEZŐEN VÁLASZTHATÓ

1/1. Differenciálható sokaságok. (Teljes atlasz. Sima leképezés. Érintőtér a sokaság egy pontjában. Érintőleképezés. Vektormezők, integrálgörbék, Lie-zárójel. Konstrukciók részsokaságokra.)

1/2. Tenzormezők sokaságokon. (A kovariáns tenzormező sima leképezés általi visszahúzása. Kovariáns deriválás, görbületi tenzor. Riemann-sokaság, Levi–Civita-féle lineáris konnexió.)

1/3. Differenciálformák. (Külső szorzat. Differenciálforma külső differenciálja. Irányítható sokaság. A kompakt tartójú térfogati forma integrálja. Stokes tétele.)

B2. Algebrai topológia (BSc) (kredit: $3 + 3$) – *Szűcs András*
Témakör: KÖTELEZŐEN VÁLASZTHATÓ

2/1. Módszerek a fundamentális csoport kiszámolására. (Fedések. Van Kampen-tétel.)

2/2. Zárt felületek osztályozása. Teljes invariánsrendszer. Fedéseik.

2/3. Differenciálható sokaságok közti leképezések fokszáma. A fokszám tulajdonságai. Alkalmazások.

B3. Parciális differenciálegyenletek (BSc) (kredit: $2 + 3$) – *Besenyei Ádám*
Témakör: KÖTELEZŐEN VÁLASZTHATÓ

3/1. Disztribúcióelmélet. (Disztribúció fogalma, példák. Disztribúció deriváltja. Disztribúciók direkt szorzata, konvolúciója. Alapmegoldások.

3/2. Cauchy-feladatok (A hővezetési és a hullámegyenlet. Klasszikus Cauchy-feladat. Az általánosított feladat bevezetése. Klasszikus megoldás létezése az általánosított megoldás segítségével. Véges sebességű hullámterjedés és végtelen sebességű hőterjedés.)

3/3. Peremérték-feladatok (A Laplace-operátor. Különböző peremfeltételek. Green-formulák. A harmadik peremérék-feladat megoldásának egyértelműsége. Green-függvények. Green reprezentációs tétele.)

3/4. Szoboljev-terek (A $H^1(\Omega)$ és $H^1_0(\Omega)$ terek bevezetése. Alaptulajdonságok. Ekvivalens norma a $H^1_0(\Omega)$ téren. Kompakt beágyazás. Nyom operátor. Peremérték-feladatok gyenge megoldása.)

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

B4. Csoportok és reprezentációik (kredit: $3+3$) – *Pálfy Péter Pál*
Témakör: ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

4/1. Permutációcsoportok és mátrixcsoportok. (Tranzitív, primitív, többszörösen tranzitív permutációcsoportok. Az általános, a speciális és a projektív lineáris csoportok.)

4/2. Fontos csoportosztályok. (Feloldható csoportok: Hall-tételek. Nilpotens csoportok. p-csoportok.)

4/3. Szabad csoportok. (Nielsen–Schreier-tétel. Csoportok megadása definiáló relációkkal. Reziduálisan véges csoportok.)

4/4. Csoportreprezentációk és karakterek. (Ortogonalitási relációk. Karaktertáblázat. Indukált reprezentációk. Frobenius-csoportok.)

B5. Gyűrűk és algebrák (kredit: $3+3$) – *Ágoston István*
Témakör: ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

5/1. Struktúraelmélet. (Primitív és prímgyűrűk, sűrűségi tétel, Jacobson-radikál. Hopkins és Levitzki tétele. Kommutativitási tételek.)

5/2. Modulusok direkt fölbontásai. (Azumaya tétele. Direkt fölbonthatatlan modulusok endomorfizmusgyűrűje. Injektív modulusok direkt fölbontásai és a gyűrűre vonatkozó láncföltételek. A reguláris modulus fölbontása, szemiperfekt gyűrűk. Projektív modulusok direkt fölbontásai.)

5/3. A homologikus algebra elemei. (Kategóriaelméleti alapfogalmak. A Hom és a tenzor funktorok. Lánckomplexusok homológiái. A homológiák hosszú egzakt sorozata. Injektív burok és projektív fedő. Gyűrűk Morita-ekvivalenciája.)

B6. Számelmélet 2 (BSC) (kredit: $3+0$) – *Sárközy András*
Témakör: ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

6/1. Prímszámelmélet. (A Riemann-féle zéta függvény 1-nél nagyobb valós változóra, Euler-fele szorzatelőállítása, alkalmazása végtelen sok prím létezésének bizonyítására. A számtani sorozatokra vonatkozó Dirichlet-tétel bizonyítas nélkül. $\sum 1/p$ becslése.) Kombinatorikus számelmélet. (Sidon-sorozatok, csupa különböző összegek, Cauchy-Davenport, fedőrendszerek.)

6/2. A két négyzetszám probléma, Gauss-egészek. További kvadratikus bővítések, $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$-ben nincs alaptétel. Bináris kvadratikus alakok osztályozása. A három négyzetszám probléma. A négy négyzetszám probléma, Lagrange tétele. A Waring-probléma, $g(k)$ és $G(k)$ alsó becslése. A p-adikus számok, Hilbert szimbólum és alaptulajdonságai. A Hasse-Minkowski tétel.)

6/3. Diofantikus approximációelmélet. (Dirichlet approximációs tétele. Alkalmazása Pell-egyenletek megoldhatóságára. $\sqrt{5}$ rosszul approximálható. Transzcendens szám konstrukciója a Liouville-tétellel. Nevezetes transzcendens számok, bizonyítás nélkül: Baker tétele a logaritmusok függetlenségéről, Gelfond-Schneider.)

ANALÍZIS

B7. Fourier-analízis (BSC) (kredit: $3 + 3$) – *Tóth Árpád*
Témakör: ANALÍZIS

7/1. Riemann-integrálható függvény Fourier-sora. A Fourier-sorfejtés eredete. Egyenletesen konvergens Fourier-sor előállítja a függvényt. Konkrét példák. A pontonkénti konvergencia problémája.

7/2. Fejér-tétel. Szummációs eljárások. Konvolúciós magok szerepe függvények közelítésében. Fejér tétel következményei.

7/3. Legjobb négyzetes közelítés. Dirichlet-mag mint merőleges vetítés. Bessel-egyenlőtlenség, L^2-konvergencia, Parseval-azonosság. Példák.

7/4. Fourier transzformáció $\mathbb{R}$-en. Schwartz-tér. A Fourier-transzformáció alaptulajdonságai a Schwartz-téren. Konkrét példák (az $\exp(-x^2)$ függvény Fourier-transzformáltja). Dualitás és az inverziós formula a Schwartz-téren.

B8. Funkcionálanalízis 2 (BSC) (kredit: $3 + 3$) – *Tarcsay Zsigmond*
Témakör: ANALÍZIS

8/1. Kommutatív Banach-algebrák Gelfand elmélete, az $\ell^1(\mathbb{Z})$ konvolúciós Banach-algebra és Norbert Wiener tétele.

8/2. Kommutatív C^*-algebrák, a kommutatív Gelfand–Naimark-tétel, folytonos függvénykalkulus

8/3. Pozitív funkcionálok és C^*-algebrák reprezentációi, GNS-konstrukció és a nemkommutatív Gelfand-Naimark tétel

B9. Többváltozós komplex függvények (kredit: 3) – *Szőke Róbert*
Témakör: ANALÍZIS

9/1. Hatványsorok (Cauchy-formula policilinderre, hatványsorba fejtés, Reinhardt-tartomány, Reinhardt-diagram, Abel-lemma, konvergenciatartomány, logaritmikus konvexitás).

9/2. Holomorfiatartományok (Hartogs kiterjesztési tételei, egzisztenciatartomány, holomorfiatartomány, holomorf konvexitás, Cartan–Thullen-tételek).

9/3. Inhomogén Cauchy–Riemann-egyenletek (Pompeiu tétele, Dolbeault-Grothendieck-tétel, $H^{0,1}(C)$ Ehrenpreis-tétel, Hartogs tétele, $H^{0,1}(C^n)$, $H^{0,1}(C^2 \setminus (0,0))$, holomorf függvény kiterjesztése hipersík metszetről, Cartan tétele).

9/4. Biholomorfizmusok (Aut(C^n, indikatrix, Poincare tétele, Cartan tétele szorzattartományok biholomorfizmusairól, Cartan unicitási tétel és következménye).

B10. Válogatott fejezetek az analízisből (kredit: $3+3$) – *Elekes Márton*
Témakör: ANALÍZIS

10/1. Hausdorff-mérték, Hausdorff-dimenzió (metrikus külső mérték, Hausdorff-mérték, kapcsolat a Lebesgue-mértékkel, Cantor-halmaz Hausdorff-mértéke, görbék 1-dimenziós Hausdorff-mértéke, önhasonló halmazok és Hausdorff-mértékük).

10/2. Haar-mérték (definíció, létezés, egyértelműség, moduláris függvény, Haar-mérték kompakt csoportokon, Pontrjagin-dualitás, absztrakt Fourier-analízis).

10/3. Generikusság (Baire-kategória, tipikus tulajdonság, tipikus folytonos függvény sehol sem differenciálható, tipikus kompakt halmaz).

10/4. További fejezetek (Lipschitz-függvények, csoporteltolás ergodikussága).

GEOMETRIA

B11. Homológiaelmélet (kredit: $3+0$) – *Szűcs András*
Témakör: GEOMETRIA

11/1. Homotópiaelmélet. (Homotopikus csoport, térpár és fibrálás homotopikus egzakt sorozata. Freudenthal-tétel, homotopikus kivágás, általánosított Freudenthal-tétel, homotopikus Whitehead-tétel.)

11/2. Homológia- és kohomológiaelméletek. (Szimpliciális, szinguláris, CW, axiomatikus tárgyalás, extraordináris elméletek.) Kapcsolat a homotópiaelmélettel (Hurewicz-tétel).

11/3. A homológiaelmélet alkalmazásai: Homologikus Whitehead-tétel, Lefschetz-tétel.

B12. Differenciáltopológia (kredit: $3+0$) – *Szűcs András*
Témakör: GEOMETRIA

12/1. Morse-elmélet alaptételei és alkalmazásai. (Poincaré-dualitás, felületek osztályozása Morse-elmélettel.)

12/2. Sokaságok immerziói és beágyazásai (Whitney tételei) Thom jet-transzverzalitás-tétele, következmények.

12/3. Pontrjagin-konstrukció. Hopf-invariáns.

B13. Fejezetek a differencálgeometriából (kredit: $3 + 0$) – *Csikós Balázs*
Témakör: GEOMETRIA

13/1. Integrálformulák hiperfelületekre. (Cauchy-formula egy konvex test felszínére, Minkowski-formula az átlagszélességre. Steiner-formula a paralleltartományok térfogatára. A Gauss-görbület integrálja zárt hiperfelületen.)

13/2. Felületek deformációi. (Felületek hajlítása, Herglotz-formula, konvex zárt felületek merevsége. Hiperfelületek infinitezimális deformációi, infinitezimális hajlítás, konvex zárt felületek infinitezimális merevsége. A felszín variációja, minimálfelületek.)

13/3. Állandó negatív görbületű felületek a térben. (Aszimptotikus vonalak, negatív görbületű felületek paraméterezése aszimptotikus vonalakkal. Csebisev-hálók. Sine–Gordon-egyenlet és az állandó negatív görbületű felületek. Hazzidakis-formula. Hilbert tétele. Állandó negatív görbületű forgásfelületek.)

B14. Kombinatorikus geometria (kredit: $3 + 2$) – *Kiss György*
Témakör: GEOMETRIA

14/1. Véges projektív és affin terek kombinatorikus tulajdonságai. Polaritások és ezekhez kapcsolódó struktúrák.

14/2. Helly tétele és néhány következménye, valamint alkalmazásai.

14/3. Az euklidészi geometria poliéderei. Konvex politópok, Euler–Poincaré-formula, szabályos poliéderek, Schläfli-szimbólum.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA

B15. Diszkrét és folytonos paraméterű Markov-láncok (kredit: $3 + 0$) – *Csiszár Villő*
Témakör: VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA

15/1. Alapfogalmak. Ergodikus Markov-láncokra vonatkozó tételek. Stacionárius eloszlás és reguláris mérték, megfordított láncok.

15/2. Véges állapotterű Markov-láncok, Perron–Frobenius-tételek. A konvergenciasebesség becslése. MCMC-módszerek.

15/3. Folytonos paraméterű Markov-láncok infinitezimális generátora. Születési-halálozási folyamatok. A Kolmogorov-féle differenciálegyenletek megoldhatósága.

B16. Diszkrét paraméterű martingálok (kredit: $3+0$) – *Móri Tamás*
Témakör: VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA

16/1. Reguláris megállási idők, Wald-azonosság. A Conway-algoritmus. Az Albert–Barabási-fa.

16/2. Négyzetesen integrálható martingálok konvergenciatulajdonságai. Optimális stratégiák nyereséges játékokban. Elágazó folyamat kétféle típusú egyeddel.

16/3. Hilbert-tér értékű martingálok, differenciában való dominálás, kvadratikus variáció, szökési szám. Martingáltranszformált. Martingálok centrális határeloszlás-tételei.

B17. Statisztikai programcsomagok 1 (kredit: $0+3$) – *Zempléni András*
Témakör: VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA

17/1. A hipotézisvizsgálat legfontosabb módszereinek számítógépes megvalósítása.

17/2. A regressziószámítás és az ANOVA gyakorlati kérdései.

B18. Többdimenziós statisztikai eljárások (kredit: $6+0$) – *Michaletzky György*
Témakör: VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA

18/1. A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése, és hipotézisvizsgálata.

18/2. A változók közötti kapcsolat mérése: korrelációs együttható, maximálkorreláció, parciáliskorreláció, kanonikus korreláció. Főkomponens analízis, faktoranalízis, szórásanalízis.

18/3. Maximum-likelihood becslés loglineáris modellben, ennek információelméleti megfogalmazása (Kullback–Leibler-féle divergencia). Lineáris és exponenciális eloszláscsaládok. Az L-vetület numerikus meghatározása (Csiszár-féle módszer, Darroch–Ratcliff-eljárás).

DISZKRÉT MATEMATIKA

B19. Algoritmuselmélet (kredit: $3+3$) – *Király Zoltán*
Témakör: DISZKRÉT MATEMATIKA

19/1. Legrövidebb utak. (Dijkstra algoritmusa, legbiztonságosabb, legszélesebb út, legszélesebb legrövidebb út, időfüggő legrövidebb út keresése. Bellman–Ford-algoritmus. Minimális átlagú kör. Johnson algoritmusa. Suurballe és Tarjan algoritmusa.)

19/2. Maximális folyamok. (Hálózatok, folyamok, (szintezett) reziduális hálózat. Dinic algoritmusa: blokkoló folyam keresése, az iterációk száma, az eljárás műveletigénye. Alkalmazások: diszjunkt utak keresése, Hopcroft-Karp algoritmusa. Többtermékes folyamok, lineáris hálózati kódolás.)

19/3. Közelítő és fix paraméteres algoritmusok: (Approximációs sémák, FPTAS a hátizsák feladatra. Közelítő algoritmus Steiner-fára, halmazfedésre, maximális stabil párosításra (döntetlenek egy oldalon). Fix paraméterrel megoldható feladatok, kernelek, példák.)

B20. Diszkrét matematika 1 (kredit: $3+3$) – *Csikvári Péter*
Témakör: DISZKRÉT MATEMATIKA

20/1. Spektrál gráfelmélet: Pszeudorandom gráfok. Gráfparaméter becslések sajátértékekkel. Erősen reguláris gráfok. Laplace-sajátértékek és feszítőfák.

20/2. Algebrai és analitikus eszközök: kombinatorikus nullstellensatz és alkalmazásai. Generátorfüggvények, „snake oil" módszer, Stirling-számok.

20/3. Valószínűségi módszerek: első és második momentum módszer és alkalmazásai. Nagy kerületű és kromatikus számú gráfok létezése. Véletlen gráfok és küszöbfüggvények.

B21. Matematikai logika (BSc) (kredit: $3+3$) – *Komjáth Péter (Csirmaz László)*
Témakör: DISZKRÉT MATEMATIKA

21/1. Ítéletkalkulus (kielegíthetőség, kompaktság, Hilbert-féle bizonyítás, teljesség, rezolúciós módszer, Gentzen-féle szekvent-kalkulus).

21/2. Elsőrendű modellelmélet (struktúraosztályok, axiomatizálhatóság, ultraszorzat, Skolem–Löwenheim-tételek, kompatkság, Hilbert-féle bizonyíthatóság teljessége, rezolúciós módszer; Robinson konzisztenciatétele, formula interpoláció, elsőrendű kalkulus unicitása).

21/3. Kiszamíthatóság (rekurzív függvények, rekurzív függvények reprezentálhatósága, Peano és Robinson axiómarendszerei; Church, Gödel es Tarski tételei; nemteljességi tételek; aritmetikai hierarchia).

OPERÁCIÓKUTATÁS

B22. Diszkrét optimalizálás (kredit: $4+3$) – *Frank András*
Témakör: OPERÁCIÓKUTATÁS

22/1. Gráfok a diszkrét optimalizálásban – minimax tételek és algoritmusok. (Mohó algoritmus, legolcsóbb fenyő, irányítási problémák, fedés és pakolás fákkal és fenyőkkel, színezések, szubmoduláris függvények.)

22/2. Gráfok a diszkrét optimalizálásban – párosításelmélet és alkalmazásai. (Kőnig és Egerváry tételei, a Berge–Tutte formula, Edmonds–Gallai-tétel, Edmonds párosítási algoritmusa, faktorkritikus gráfok, merevítés pontok leszúrásával.)

22/3. Matroidok a diszkrét optimalizálásban. (Ekvivalens axiómarendszerek, rangfüggvény, matroidosztályok, összefüggő matroidok, a duális matroid. Mohó algoritmus. Matroidok metszete és uniója. Ritkasági matroidok, alkalmazások.)

B23. Folytonos optimalizálás (kredit: $4+3$) – *Bérczi Kristóf*
Témakör: OPERÁCIÓKUTATÁS

23/1. Konvex függvények, első- és másodrendű karakterizáció, lokális minimum vs globális minimum, szigorú konvexitás, erős konvexitás, példák konvex függvényekre.

23/2. Konvex optimalizálás dualitáselmélete, konvex program, Lagrange-függvény, duális feladat, gyenge és erős dualitás, optimalitási feltételek, Karush–Kuhn–Tucker-feltételek, Slater feltétele.

23/3. Newton-módszer, kvadratikus konvergencia, Newton lépés többváltozós esetben, lokális norma, Newton-módszer mint gradiens módszer, Newton-lokális feltételek, konvergencia.
