

Operátorfélcsoportok Polinomiális Stabilitása

Bátkai András*

ELTE TTK Alkalmazott Analízis Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter Sétány 1C
e-mail: batka@cs.elte.hu

2005. június 20.

1. Bevezetés

Az operátorfélcsoportok – vagy más néven lineáris szemidinamikai rendszerek – igen fontos szerepet töltek be az elmúlt ötven évben a funkcionálanalízis és a parciális differenciálegyenletek határterületén. Nagyon sok időfüggő parciális differenciálegyenlet (rendszer) írható át természetes módon egy absztrakt Cauchy feladattá

$$(ACP) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & t \geq 0, \\ u(0) = x \end{cases}$$

alkalmasan megválasztott X Banach függvénytéren, ahol A egy nemkorlátos operátor.

A megoldásokat fel tudjuk írni $u(t) = T(t)x$ alakban, ahol $T(t) \in \mathcal{L}(X)$. Ilyenkor formálisan „ $T(t) = e^{-At}$ ” a $(-A)$ operátor által generált operátorfélcsoport vagy szemidinamikai rendszer. Mivel alkalmazásokban általában az A operátorral találkozunk, a megoldóoperátorokat pedig csak nagyon ritkán, igen egyszerű esetekben tudjuk megadni, kezdettől fogva igen fontos kérdés volt, hogy az A operátor bizonyos funkcionálanalitikus tulajdonságaiból tudunk-e a megoldások valamilyen aszimptotikus vagy regularitási tulajdonságaira következtetni. Klasszikus példák ilyen irányú vizsgálatokra azok a Ljapunov tételek, melyek az A sajátértékeinek elhelyezkedéséből következtetnek T aszimptotikus (exponenciális) stabilitására vagy hiperbolikusságára. Végtelen dimenzióban a helyzet sokkal árnyaltabb, az ezirányú kutatások legújabb eredményeit jól dokumentálja Engel és Nagel [7] valamint Arendt, Batty, Hieber és Neubrander monográfiája [3].

Az utóbbi tíz évben szórványosan, elsősorban hiperbolikus egyenletek és rendszerek vizsgálata során, felbukkant egy olyan jelenség, melyre eddig nem volt elméleti magyarázat. Ezt tömören úgy lehet megfogalmazni, hogy klasszikus megoldások polinomiális sebességgel konvergálnak a nullához. Két példát említenék, az olvashatóság érdekében bizonyos technikai részletek elhagyásával.

*A kutatást a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj és az OTKA F049624 pályázata támogatta. Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya 2005. június 8-adiki ülésén.

1.1 Példa Tekintsük a következő, csillapított hullámegyenletet:

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x, t) = \Delta u(x, t) + d(x) \partial_t u(x, t), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x). \end{cases}$$

Itt $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $d(x) \geq 0$, d folytonos és

$$\text{supp } d \supset \{(x_1, x_2) \in \Omega : a < x_1 < b, x_2 \in (0, \pi)\}$$

valamely $0 < a < b < \pi$ számokra. Hasonló egyenleteket Teheugoué Tébou [13] valamint Liu és Rao [11] vizsgáltak. Eredményük azt mutatja, hogy bár a megoldások nullához tartanak, általában nem egyenletesen és nem exponenciális sebességgel. A klasszikus megoldások energiájára

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\beta}$$

becslés teljesül ahogy $t \rightarrow +\infty$ valamely $\beta \in (0, 1)$ konstansra. A C konstans a megoldáshoz tartozó kezdeti feltétel megfelelő Szoboljev normájának segítségével kapható meg.

1.2 Példa Tekintsük a következő csatolt hullámegyenlet-rendszert.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x, t) + \Delta u(x, t) + b \partial_t u(x, t) + \kappa u(x, t) - \kappa v(x, t) = 0, \\ \partial_{tt}^2 v(x, t) + \Delta v(x, t) + \kappa v(x, t) - \kappa u(x, t) = 0, \\ + \text{Dirichlet peremfeltétel} \\ + \text{kezdeti feltételek.} \end{cases}$$

Itt $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ elegendően sima tartomány, $b > 0$ és κ egy kicsiny pozitív konstans. Ezt a rendszert Alabau, Cannarsa és Komornik vizsgálta [2] és az előző példához hasonlóan azt kapta, hogy a klasszikus megoldások energiájára

$$E(t) \leq \frac{C}{t}.$$

A C konstans itt is függ a kezdeti feltétel Szoboljev-normájától.

Összefoglalva, azt látjuk, hogy bizonyos absztrakt Cauchy feladatokra az A operátorra teljesülő valamely feltételek mellett

$$(1) \quad \|T(t)x\| \leq \frac{C}{t^\beta} \|A^\alpha x\|$$

minden $x \in D(A^\alpha)$ esetén valamely $\alpha, \beta > 0$ konstansokra. Jelen előadás célja ennek a jelenségnek a magyarázata funkcionálanalitikus módszerekkel. A bemutatott eredmények nagy része K.-J. Engel, J. Prüß és R. Schnaubelt társszerzőkkel írt [4] cikkből származik.

2. Polinomiális Stabilitás

A továbbiakban (1) becslést szeretnénk alaposabban körüljárni. Azzal a megjegyzéssel kezdjük, hogy belátható, ilyenkor mindig $0 \in \rho(A)$, így az egyenlőtlenség az ekvivalens

$$(2) \quad \|T(t)A^{-\alpha}\| \leq \frac{C}{t^\beta}$$

alakba írható, melyet könnyebb kezelhetősége miatt inkább fogunk használni. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy A a korlátos T operátorfélcsoport generátora és $0 \in \rho(A)$ ¹.

Megmutatjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség átskálázható $\beta = 1$ alakra.

2.1 Állítás *Ekvivalensek a következők:*

- (i) $\|T(t)A^{-\gamma}\| \leq \frac{C}{t}$
(ii) $\|T(t)A^{-\beta\gamma}\| \leq \frac{C_\beta}{t^\beta}$

egy/minden $\beta > 0$ esetén.

Bizonyítás Világos, hogy csak az (i) \Rightarrow (ii) irányt kell bizonyítani. Most csak a $\beta \in \mathbb{N}$ esetet vizsgáljuk, az általános állítás a momentum-egyenlőtlenségből következik, lásd [7, Theorem II.5.34]. Ez az eset viszont a félcsoport-tulajdonságból következik, hiszen

$$\begin{aligned} \|T(t)A^{-\beta\gamma}\| &= \left\| \left(T\left(\frac{t}{n}\right)(-A)^{-\gamma}\right) \cdot \left(T\left(\frac{t}{n}\right)(-A)^{-\gamma}\right) \cdot \dots \cdot \left(T\left(\frac{t}{n}\right)(-A)^{-\gamma}\right) \right\| \\ &= \frac{C^n}{\left(\frac{t}{n}\right)^n} = \frac{C(n)}{t^n}. \end{aligned}$$

A fenti állítás egy speciális esete mint Alabau lemmája ismeretes, lásd [1]. Lényege, hogy polinomiális stabilitás esetén minél simább kezdeti feltételeket veszünk, annál gyorsabb konvergenciát kapunk.

2.2 Definíció Azt mondjuk, hogy a $(-A)$ operátor által generált T operátorfélcsoport *polinomiálisan stabil*, ha található olyan $C, \gamma > 0$, melyekre

$$\|T(t)A^{-\gamma}\| \leq \frac{C}{t}, \quad t \geq 1.$$

2.3 Megjegyzés Ha T egy polinomiálisan stabil félcsoport, akkor 2.1 Állítás szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\|T(t)A^{-\gamma-\varepsilon}\| \leq \frac{C'}{t^{1+\frac{\varepsilon}{\gamma}}},$$

így

$$(T(\cdot)A^{-\gamma-\varepsilon}x) \in L^1(\mathbb{R}^+, X) \quad \forall x \in X.$$

Ebből viszont, használva, hogy $\Re\lambda > 0$ esetén az A operátor rezolvense az operátorfélcsoport Laplace-transzformáltja, kapjuk, hogy

$$\|(\lambda + A)^{-1}A^{-\gamma-\varepsilon}\| \leq M_\varepsilon, \quad \Re\lambda > 0.$$

Tehát a polinomiális stabilitásnak szükséges feltétele, hogy a fenti függvény korlátos legyen a jobb félsíkon minden pozitív ε esetén. A következő tétel azt mutatja, hogy ez majdnem elégséges is.

¹A korlátosság tulajdonképpen nem lényeges, de jelentősen leegyszerűsíti tárgyalásunkat. Mivel minden eddig ismert alkalmazás ebbe a kategóriába esik, úgy véljük, ez nem nagy megszorítás.

2.4 Tétel Legyen $(-A)$ a T korlátos operátorfélcsoport generátora, melyre teljesül, hogy $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ és tegyük fel, hogy található olyan $C, \gamma > 0$, melyekkel

$$\|(i\rho + A)^{-1}A^{-\gamma}\| \leq C, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $C_\varepsilon > 0$, mellyel

$$\|T(t)A^{-\gamma-\varepsilon}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{t}.$$

A bizonyítás a 2.1 Állítás és a félcsoportot a rezolvensből előállító

$$T(t)x = \frac{(k-1)!}{t^{k-1}} \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{w-in}^{w+in} e^{\lambda t} R(-\lambda, A)^k x d\lambda$$

inverziós formula alkalmazásából következik. A számolásokat most nem részletezzük.

A fenti állításokban a megjelenő ε a bizonyítási módszerek miatt jelenik meg és pillanatnyilag egyáltalán nem világos, általában szükség van-e rá. Egyelőre nem ismert olyan példa, ahol valóban szükség lenne rá.

A 2.3 Megjegyzésben és a 2.4 Tételben megjelenő függvény korlátosságának megtalálható egy szemléletes átfogalmazása Latushkin és Shvidkoy [9, Lemma 3.2] cikkében.

2.5 Állítás Legyen $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Ekvivalensek a következők:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|(i\rho + A)^{-1}A^{-\gamma}\| \leq C \quad \rho \in \mathbb{R} \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\|(i\rho + A)^{-1}\|}{1 + |\rho|^\gamma} \leq C' \quad \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ebből a rezolvens normára és a spektrumtól vett távolságra vonatkozó nevezetes egyenlőtlenség segítségével egy fontos geometriai szükséges feltételét kapjuk a polinomiális stabilitásnak.

2.6 Példa Tekintsük a 1.1 Példában szereplő csillapított hullámmegyenletet. Ezt a szokásos módon rendszerré átírva kapunk egy absztrakt Cauchy feladatot a

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

térben az

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -d \end{pmatrix}, \quad D(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : v \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

operátorral. Egy viszonylag nem túl bonyolult, de hosszadalmas indirekt gondolatmenettel megmutatható, hogy

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$$

és hogy található olyan $M > 0$, mellyel

$$\frac{\|(i\rho + \mathcal{A})^{-1}\|}{1 + |\rho|} \leq M \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

2.7 Példa Tekintsük az először J. Zabczyk által vizsgált példa egy variánsát, lásd [7, Counterexample 3.4]. Legyen

$$A_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}),$$

$H := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^n$, $T(t) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (e^{-t} e^{int} e^{A_n t})$. Megmutatható, mivel ez a félcsoport minden véges dimenziós blokkon függetlenül hat, hogy generátora $(-A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (A_n + in - 1)$, melyre $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda \leq -1\}$, $\omega_0(-A) = 0$, valamint egyszerű számolással adódik, hogy

$$\|R(i\rho, A)\| \sim \rho \quad (|\rho| \rightarrow \infty).$$

3. Speciális Egyenletrendszerek

Operátorok rezolvensének normáját becsülni konkrét alkalmazásoknál általában igen nehéz feladat, így természetesen vetődik fel a kérdés, hogy legalább bizonyos speciális operátorokra nem lehet-e valamilyen könnyebben ellenőrizhető, tisztán spektrális feltételt adni. Idevágó vizsgálatainkat egy elemi példával kezdjük.

3.1 Példa Legyen $X := l^p(\mathbb{N})$, $a_n := \sigma_n + i\rho_n$, és $A := M_{a_n}$ az (a_n) sorozattal való szorzás operátora, azaz $A(x_n) := (a_n x_n)$. Tegyük fel, hogy erre a sorozatra teljesül az előző fejezetben szerepeltetett szükséges geometriai feltétel, azaz hogy

$$\sigma_n > 0, \sigma_n \rightarrow 0, \text{ és } \exists C > 0, \gamma > 0 : \sigma_n |\rho_n|^\gamma \geq C.$$

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} \|tT(t)A^{-\gamma}(x_n)\|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(te^{-\sigma_n t} \frac{|x_n|}{|\sigma_n + i\rho_n|^\gamma} \right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(te^{-\sigma_n t} \frac{|x_n|}{|\rho_n|^\gamma} \right)^p \\ &\leq \frac{1}{C^p} \sum_{n=1}^{\infty} (t\sigma_n e^{-\sigma_n t} |x_n|)^p \leq \frac{1}{(eC)^p} \|(x_n)\|^p. \end{aligned}$$

Itt használtuk a pozitív x -ekre vonatkozó $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ egyenlőtlenséget.

A fenti példában látott gondolatmenet az alapja a következő, elméleti és gyakorlati szempontból is érdekes állításnak.

3.2 Tétel Legyen H egy szeparábilis Hilbert tér, $X := H^n$, $\mathcal{A} := (A_{ij}) : X \rightarrow X$ ahol $A_{ij} : H \rightarrow H$ felcserélhető normális operátorok úgy, hogy $(-\mathcal{A})$ a generátora egy $\mathcal{T}(t)$ operátorfélcsoportnak. Ekvivalensek a következők egy adott $\gamma > 0$ konstanssal:

(i) Található olyan $C > 0$, mellyel

$$\|\mathcal{T}(t)\mathcal{A}^{-\gamma}\| \leq \frac{C}{t}, \quad t \geq 1.$$

(ii) Van olyan $C' > 0$, hogy

$$\|(i\rho + A)^{-1}A^{-\gamma}\| \leq C', \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

(iii) Létezik olyan $C'' > 0$, $\delta > 0$, melyekkel bármely $\lambda \in \sigma(A)$, $\Re\lambda < \delta$ esetén teljesül, hogy

$$\Re\lambda|\Im\lambda|^\gamma \geq C''.$$

A bizonyítás első lépése annak megállapítása, hogy a A operátor a spektráltétel szerint (lásd [12, Section X.3]) unitér ekvivalens egy $L^2(\Omega, \mathbb{C}^n)$ téren ható mátrix-multiplikátor operátorral. Ezekre a tétel n szerinti teljes indukcióval bizonyítható. A bizonyítás fontos technikai eszköze Kreiss mátrixtéttele, mely segítségével egyenletes konstansokkal lehet háromszög-alakra hozni az előforduló mátrixokat.

Tekintsük egy alkalmazását a fenti tételnek. A következő példát Alabau, Cannarsa és Komornik [2] tárgyalta.

3.3 Példa Legyen H (szeparábilis) Hilbert tér, $A = A^* \geq \omega > 0$ adott operátor. Például ha $H = L^2(\Omega)$, gondolhatunk arra, hogy $-A = \Delta_D$ a Dirichlet-Laplace operátor. Tekintsük a következő csatolt egyenletrendszert

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + A^2 u + \beta u' + \kappa v = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t^2 v - Av + \kappa u = 0 \end{cases}$$

megfelelő kezdeti feltételekkel. Itt $\beta > 0$ és $\kappa > 0$ kicsi, egészen pontosan $0 < \kappa < \omega^{\frac{3}{2}}$. A szokásos módon átírva rendszerré egy absztrakt Cauchy feladatot kapunk a $\mathcal{H} := D(A) \times H \times D(A^{\frac{1}{2}}) \times H$ térben, ahol a megfelelő értelmezési tartományokat a gráf-normákkal tekintjük. A hozzá tartozó operátor a

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ A^2 & \beta & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \kappa & 0 & A & 0 \end{pmatrix}.$$

Könnyen megmutatható, hogy ez unitér ekvivalens egy felcserélhető normális operátorokból álló operátormátrixal a H^4 téren és disszipatív, tehát egy kontrakciófélcsoport generátora. Tehát az előző tétel alkalmazható.

Standard gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a^2 + \beta\lambda + \lambda^2)(a + \lambda^2) = \kappa^2, a \in \sigma(A)\}.$$

Klasszikus perturbációelméleti eredményekből következik (lásd pl. [5, Theorem A.4.1, A.5.4]), hogy a fenti negyedfokú egyenlet gyökeit $\frac{1}{a}$ szerint sorba lehet fejteni, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(a) &= \pm i\sqrt{a} \left(1 - \frac{\kappa^2}{2}a^{-3} - \frac{\kappa^2}{2}a^{-4} \right) - \frac{\beta\kappa^2}{2} \frac{1}{a^4} + \mathcal{O}(a^{-\frac{9}{2}}), \\ \lambda_{3,2}(a) &= \pm ia - \frac{\beta}{2} + \mathcal{O}(a^{-1}). \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből kiolvasható, hogy ha $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ és $\Re\lambda$ elegendően kicsiny, akkor

$$|\Im\lambda| \geq C|\Re\lambda|^{-\frac{1}{8}}.$$

Tehát alkalmazható 3.2 Tétel, melyből a klasszikus megoldások energiájára a

$$\|\mathcal{J}(t)\mathcal{A}^{-1}\|^2 \leq \frac{C}{t^4}$$

becslést kapjuk.

Hivatkozások

- [1] Alabau-Boussouira, F., *Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems*, SIAM J. Control Optim. **41** (2002), 511–541.
- [2] Alabau, F., Cannarsa, P., Komornik V., *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*, J. Evol. Equ. **2** (2002), 127–150.
- [3] Arendt, W., Batty, C., Hieber, M., Neubrander, F., *Vector Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhäuser Verlag, Monographs in Mathematics **96**, 2001.
- [4] Bátkai A., Engel, K.-J., Prüß, J., Schnaubelt, R., *Polynomial stability of operator semigroups*, megjelenik Math. Nachr.
- [5] Baumgärtel, H. *Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators*, Operator Theory: Advances and Applications **15**, Birkhäuser Verlag, 1985.
- [6] Engel, K.-J., *Operator Matrices and Systems of Evolution Equations*, könyv kézirat, URL: <http://www.fa.uni-tuebingen.de/people/klen/omsee.ps>
- [7] Engel, K.-J., Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **194**, 1999.
- [8] Kreiss, H. O., *Über Matrizen die beschränkte Halbgruppen erzeugen*, Math. Scand. **7** (1959), 71–81.
- [9] Latushkin, Y., Shvidkoy, R., *Hyperbolicity of semigroups and Fourier multipliers*, in: A.A. Borichev, N.K. Nikolski (eds.), *Systems, approximation, singular integral operators, and related topics (Bordeaux, 2000)*, Oper. Theory Adv. Appl. **129**, Birkhäuser Verlag, 2001, pp. 341–363.
- [10] Lebeau, G., Zuazua, E., *Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **148** (1999), 179–231.
- [11] Z. Liu, B. Rao, *Characterization of polynomial decay of operator semigroups*, preprint, 2005.
- [12] Sz.-Nagy B., *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Springer-Verlag, Corrected Reprint, 1967.
- [13] Tcheugoué Tébou L. R., *Well-posedness and energy decay estimates for the damped wave equation with L^r localizing coefficient*, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), 1839–1855.