Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Bärnkopf Pál

Pontszámvektorok algoritmikus vizsgálata

MSc szakdolgozat

Témavezető:

Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak, hogy elvállalta a konzulensi feladatokat, és ötleteivel, gondolataival és rendszeres konzultációkkal segítette a szakdolgozat létrejöttét.

Köszönöm Sándor Andrásnak a rengeteg segítséget, elsősorban az angol nyelv okozta problémák áthidalásában, továbbá azzal, hogy figyelemmel követte a szakdolgozat alakulását, mindig érdeklődött, lelkesített, motivált, valamint tanácsaival is segítette a szakdolgozat írás folyamatát.

Köszönettel tartozom még szüleimnek, testvéreimnek, családom többi tagjának, ezentúl barátaimnak, hogy támogattak az elmúlt két évben, többek között a szakdolgozat elkészítésében is.

Budapest, 2018. május 20.

Bärnkopf Pál

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A pontszámvektorok algoritmikus vizsgálata közvetlenül a hétköznapi élet által motivált feladatkör. A felmerülő kérdések csaknem mindegyike bajnokságokról, lejátszott és hátralévő meccsekről, gólkülönbségekről és persze gyakran a versenysportokban lényegi kérdésről szól: ki nyerhet?

Szerencsére a felvetődő problémák többsége könnyen megfogható matematikai eszközökkel: a bajnokságot tudjuk ábrázolni egy (multi)gráffal, a győzelmeket és vereségeket az élek megirányításával, a gólkülönbséget a csúcsokon értelmezett súlyfüggvénnyel, stb. Így minden készen áll hozzá, hogy a kérdéskörből matematikát csináljunk. Egyes kérdéseket már az 1950-es években is vizsgáltak, ám az eredmények túlnyomó többsége 2000 utáni.

Az első fejezetben azzal foglalkozunk, hogy milyen kimenetele lehet egy bajnokságnak, azaz minden csapatra megmondjuk, hogy hány meccset nyerjen illetve veszítsen el, valamint mennyi döntetlent játsszon, és azt a kérdést szeretnénk megválaszolni, hogy van-e olyan lefutása a bajnokságnak, amely a végén teljesíti az előírásokat. Röviden felidézzük azt a jól ismert tényt, hogy ha nem engedünk meg döntetlent, akkor könnyen megválaszolható a kérdés. Sajnos a további eredmények azt mutatják, hogy a döntetlen megengedése nagyban bonyolítja a feladatot: a feladat így már NP-teljes lesz már speciális gráfosztályokon (sík gráfok, páros gráfok, teljes páros gráfok) is. A vizsgált esetek közül csak a teljes gráf nem illeszkedik a sorba, arra polinomiális időben meg tudjuk válaszolni a kérdést.

A következő fejezetben (a hétköznapi élethez közelítve) már pontokat kapnak a csapatok, így minden csapat aktuális pontszámát és a hátralévő meccseit tudjuk. Azt vizsgáljuk, hogy egy csapat győzhet-e a bajnokságban, illetve ha a győzelemért 3 pont, a döntetlenért 1 pont, a vereségért 0 pont jár, mi a legrosszabb helyezés, amit elérhet. (Ez a feladat *nem* komplementere az előzőnek, mert a pontozási szabály nem szimmetrikus.) Sajnos ezekre a kérdésekre sem kapunk konstruktívabb eredményt: egy-két speciális pontozási szabálytól eltekintve NP-teljes kérdés, hogy győzhet-e még egy adott csapat és coNP-teljes kérdés, hogy elérhet-e a K-adiknál rosszabb helyezést. Nyilvánvaló, hogy ha csak kevés meccs van hátra a bajnokságból, könnyebb a feladat, megvizsgáljuk, hogy mennyi lehet ez a kevés meccs. A fejezet végén általánosítjuk a problémát és az általánosabb kontextusban is karakterizáljuk, melyik esetben milyen bonyolultsági osztályba esik a feladat.

A korábbi fejezetekben nem foglalkoztunk külön azzal, hogyan alakul az egyes meccsek gólkülönbsége. Minden alkalommal feltettük az egyszerűség kedvéért, hogy úgy alakul, ahogy az számunkra a legkedvezőbb. A harmadik fejezetben azt a kérdést járjuk körül, hogy hogyan befolyásolják a gólkülönbségek a végeredményt. Azt láthatjuk, hogy ebben az esetben a pontszámoknak nem lesz komoly szerepe. Azt kapjuk, hogy annak eldöntése, hogy egy csapat a gólkülönbségek módosításával elérhet-e egy megfelelően jó eredményt, NP-teljes feladat.

A lehetséges legjobb és legrosszabb eredmények vizsgálata során feltesszük, hogy adott egy kiindulási állapot, amely már megvalósult, de nem foglalkozunk azzal, hogy a kiindulási állapot valóban megvalósítható-e. Az utolsó fejezetben azt vizsgáljuk, hogy el tudjuk-e dönteni, hogy egy adott pontszámsorozat megvalósítható-e, lehet-e a bajnokság pillanatnyi állása, de erre a kérdésre is azt kapjuk, hogy NP-teljes feladat.

Összességében azt láthatjuk, hogy ha P≠NP, akkor nem reménykedhetünk általános polinomiális algoritmusokban, amelyek megválaszolják a fenti kérdéseket. Persze azért nem kell elkeserednünk, hiszen a való életben jellemzően nem olyan sok csapatos egy bajnokság, és kevés csapatra még egy exponenciális futásidejű algoritmus is adhat emberi időben választ. Sőt ha Magyarország kijut az Európa-bajnokságra, az ország fele minden algoritmus nélkül megmondja, hogy a csoportkörben melyik csapattal milyen eredményt kell játszanunk.

2. Gráfok előírt fokszámú megirányítása

2.1. Előírt ki-, és befokok

A hétköznapi életben is több helyen használható kérdés, hogy ha van egy gráfunk, az megirányítható-e úgy, hogy az irányítás kielégítsen bizonyos előírásokat a csúcsokon. Legegyszerűbb példa persze (ahogy a bevezetőben is említettük) egy bajnokság, ahol minden csapat játszik minden csapattal, a csapatokat egy gráf csúcsainak tekintjük, a köztük lejátszott meccsek az élek, és az irányítás során minden élt a meccs győztese felé irányítunk (később, ha vannak döntetlenek is, akkor a döntetlen meccsek éleit irányítatlanul hagyjuk). Arra vagyunk kíváncsiak, hogy ha megmondjuk minden csapatra, hogy mennyi meccset nyerjen ill. veszítsen el, akkor van-e olyan kimenetele a bajnokságnak, ami valóban teljesíti ezeket a feltételeket.

Ez a kérdés, amikor döntetlenek nincsenek megengedve, a témakör egyik legismertebb kérdése, már régóta ismert teljes körű karakterizáció, Landau 1953-as tétele könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltételt ad a létezéshez.

1. Állítás. *[10] A $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ fokszám sorozat pontosan akkor lehet egy turnament kifok sorozata, ha minden $1 \leq k \leq n$-re $\sum_{i=1}^{k} d_i \geq \frac{k(k-1)}{2}$ és $\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{n(n-1)}{2}$.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a feltétel teljesül a turnament kifok sorozatára. (Tetszőleges k pontra a köztük menő $\frac{k(k-1)}{2}$ él a k pont valamelyikéből lép ki és a kifokok összege az összes él száma.)
A másik irányt indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy egy $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ sorozat teljesíti a feltételeket, de nincs olyan turnament, aminek ez a kifoksorozata. Vegyünk egy olyan irányítását a turnamentnek, amelyre $\sum_{i=1}^{n} |\delta(i) - d_i|$ minimális (ahol δ a turnament kifok függvénye). Ha a d_i nem egyezik meg a kifok függvénnyel, akkor van olyan csúcs, amelyiknek a kifoka nagyobb, mint az adott d_i fokszám előírás, hiszen, ha minden csúcson kisebb vagy egyelő a kifok, mint az előírás és nem egyezik meg az előírással, akkor $\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} d_i > \sum_{i=1}^{n} \delta(i) = \frac{n(n-1)}{2}$, ami nem lehet. Vegyünk egy ilyen s csúcsot és nézzük az ebből a csúcsból elérhető csúcsok S halmazát (nyilván ekkor S-ből nem lép ki él). Ezen csúcsok mindegyikén legalább annyi a kifok, mint az előírás, mert, ha lenne egy v csúcs, ami elérhető s-ből és kevesebb a kifoka, mint az előírás, akkor az $s-v$ út mentén minden élt megfordítva csak s-nek és v-nek változik a kifoka és mindkettőnek közelebb lesz az

előíráshoz, így az irányításnál választott szumma értéke csökkenne, ami ellentmond a minimalitásnak. Így az S halmazra: $\sum_{i \in S} \delta(i) > \sum_{i \in S} d_i \geq \sum_{i=1}^{|S|} d_i \geq \frac{|S|(|S|-1)}{2}$, ami nem lehet, mert S-ből nem lép ki él. Így ellentmondásra jutottunk. ■

Aztán hamar megszületik az emberben az általánosítás igénye és eljut arra a kérdésre, hogy rendben, teljes gráfra kaptunk egy szép és egyszerű karakterizációt, de megtudnánk-e ezt mondani tetszőleges gráfra? Vagyis visszatérve a bajnokságra, van-e olyan köztes állapot a bajnokság folyamán, amikor a csapatokra pont teljesül az előírt vereség-szám. Ez is egy viszonylag könnyen eldönthető kérdés.

2. Állítás. *[6] Adott $G = (V, E)$ gráfra és $k : V \to \mathbb{Z}_+$ függvényre pontosan akkor létezik G-nek olyan irányítása, melyre a v csúcs kifoka $k(v)$, ha minden $X \subset V$-re $\tilde{k}(X) \leq e(X)$ és $\tilde{k}(V) = |E|$. (Ahol $e(X)$ azon élek száma, amelyek legalább egyik vége X-ben van.)*

Első ránézésre úgy tűnhet, hogy nem vagyunk előrébb, hiszen ebben az állításban minden részhalmazról állítunk valamit, ezt ellenőrizni exponenciális feladat, így nem tudhatjuk, hogy ez a feladat P-ben van-e. A következő állításból láthatjuk, hogy ha van ilyen irányítás, az könnyen megtalálható.

3. Állítás. *[6] Ha egy adott $G = (V, E)$ gráfnak (adott $k : V \to \mathbb{Z}_+$ függvénnyel) van olyan irányítása, melyre minden v csúcs kifoka a $k(v)$ érték, akkor ez az irányítás $\mathcal{O}(|E|)$ lépésben megtalálható.*

Bizonyítás. Ha a G gráf nem összefüggő, komponensenként bizonyítunk, így feltehető, hogy G összefüggő. Vegyük egy tetszőleges irányítását G-nek. Ha minden v csúcsra a kifok $k(v)$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor van olyan v_1 csúcs, amelyre a kifok kisebb, mint $k(v_1)$, de ekkor kell lennie olyan v_2 csúcsnak, amelyből v_1 irányított úton elérhető és a kifoka nagyobb, mint $k(v_2)$. Ha nem lenne ilyen, akkor legyen V_1 azon csúcsok halmaza, amelyekből v_1 elérhető irányított úton. V_1-be nem léphet be él, ezért (ha $k_1(v)$ a v csúcs aktuális kifoka) $e(V_1) = \tilde{k_1}(V_1)$. $\tilde{k}(V_1) \leq e(V_1)$ az előző tétel szerint és $\tilde{k_1}(V_1) < \tilde{k}(V_1)$, mert V_1-ben minden csúcs kifoka kisebb vagy egyenlő, mint az előírás és v_1 kifoka kisebb. Összerakva az információkat $\tilde{k_1}(V_1) < \tilde{k}(V_1) \leq e(V_1) = \tilde{k_1}(V_1)$, ami ellentmondás. A $v_2 v_1$ utat megfordítva v_2-nek és v_1-nek javul a kifoka, a többi csúcsnak nem változik. ■

2.2. Előírt ki-, be-, és irányítatlan fokok

Már az első fejezetben is érintőlegesen felmerült az igény, hogy a döntetleneket is engedjük meg. Hogy módosul a feladat, ha előírunk irányítatlan fokokat is? Az első feladatkörben azt láttuk, hogy amíg nem engedünk meg döntetleneket, addig teljesen általánosan tetszőleges gráfra is polinomiális a feladat, kezdjük most a kérdés vizsgálatát rögtön a legáltalánosabb feladattal:

4. Definíció. PARTIAL ORIENTATION: Adott egy egyszerű gráf és minden csúcsán adott egy kifok, egy befok és egy irányítatlan fok előírás. Kérdés, hogy az éleket megirányítva elérhető-e a kívánt fokszám előírás?

5. Megjegyzés. Ebben a definícióban, illetve a következő állítás bizonyítása során azt is megirányításnak tekintjük, ha egy élről eldöntjük, hogy irányítatlan marad.

6. Tétel. *[12] A PARTIAL ORIENTATION feladat NP-teljes.*

Bizonyítás. Jelöljük egy adott v csúcsból kilépő élek számát $d(v)$-vel, egy vegyes irányítású gráfban pedig a befokot $\rho(v)$-vel, a kifokot $\delta(v)$-vel, az irányítatlan fokot pedig $\theta(v)$-vel. Egy irányítatlan gráf jó megirányításának nevezzük az éleknek egy olyan megirányítását, amelyre a fokszám előírások teljesülnek.

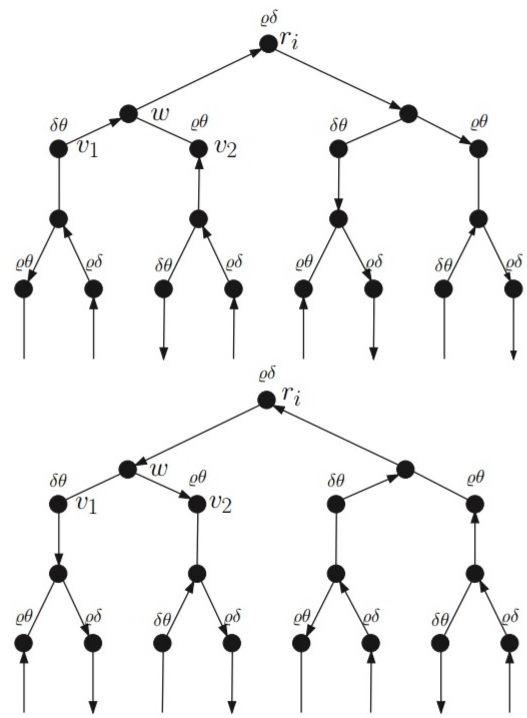
7. Definíció. 3-SAT: Adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz három literált tartalmaz. Kérdés, hogy megválaszthatók-e a változók értékei úgy, hogy a kifejezés igaz legyen (azaz a normálforma kielégíthető-e)?

8. Megjegyzés. [5] A 3-SAT feladat NP-teljes.

A 3-SAT feladatot visszavezetjük a PARTIAL ORIENTATION feladatra. Mivel a 3-SAT feladat NP-teljes, ezért ez a visszavezetés bizonyítja az állítást. Vegyünk egy konjunktív normálformát, amelyben minden klóz három literált tartalmaz, legyenek ennek a változói $x_1, \ldots, x_n$, a klózok pedig $C_1, \ldots C_m$. Ehhez fogunk konstruálni egy fát, ami pontosan akkor irányítható jól, ha a konjunktív normálforma kielégíthető.

Definiálunk minden x_i változóhoz egy r_i gyökerű fát: a gyökér és minden páros szinten elhelyezkedő csúcs legyen másodfokú és minden páratlan szinten elhelyezkedő csúcs legyen három fokú. Az utolsó szint egy páros szint legyen, a levelekből egy-egy él fog kimenni a gráf többi részébe, a későbbiekben definiáljuk, hogyan.

Legyenek a fa csúcsain az alábbiak a fokszám előírások: minden páratlan szinten levő w csúcsra $\rho(w) = \delta(w) = \theta(w) = 1$. Jelölje $\rho\delta$ a v csúcson azt a fokszám előírást, hogy $\rho(v) = \delta(v) = 1$ és $\theta(v) = 0$, $\rho\theta$ azt, amikor $\rho(v) = \theta(v) = 1$ és $\delta(v) = 0$ és $\delta\theta$ azt, amikor $\delta(v) = \theta(v) = 1$ és $\rho(v) = 0$. Ekkor minden páros szinten $\rho\delta$, $\rho\theta$ és $\delta\theta$ egyike lesz a fokszám előírás, mégpedig a következőképpen: r_i $\rho\delta$ fokszám előírású, r_i mindkét gyerekének egyik gyereke $\delta\theta$, másik gyereke $\rho\theta$ fokszám előírású, és a továbbiakban, ha egy csúcsnak $\rho\delta$ a fokszám előírása, akkor a két unokájának $\delta\theta$ és $\rho\theta$ és hasonlóan $\delta\theta$ előírás esetén a két unoka $\rho\delta$ és $\rho\theta$ előírású, $\rho\theta$ esetén pedig $\rho\delta$ és $\delta\theta$ legyen a két unokán a fokszám előírás. [1. ábra]



1. ábra. A két lehetséges irányítás

A konstrukcióból látszik, hogy a fának összesen két jó irányítása van: ha az r_i-ből kilépő két élre megmondjuk, hogy melyik lépjen be r_i-be és melyik menjen ki r_i-ből (r_i-nek egy belépő és egy kilépő éle lesz a fokszám előírás miatt), akkor az az egész fán meghatározza az irányítást. Valóban, ha a k-adik szinten van egy v csúcs és eddig a szintig már eldöntöttük az irányítást, akkor következő szintre is adódik a megirányítás: ha k páros, akkor v két előírt éléből egy fölfele megy, így már el van döntve az irányítása, tehát szükségszerű, hogy alulról a másik típusú él menjen v-be. Ha pedig k páratlan, akkor olyan típusú él megy v-be föntről, ami nem lehet a két gyerekének a közös előírása. Így mindkét gyerekébe egyértelmű, hogy milyen élnek kell mennie.

Jelöljük $a(l)$-el a $2l$-edik szintről a $2l+1$-edik szintre menő $\rho\delta$ élek (azaz azon élek, amelyek nem lehetnek irányítatlanok, vagyis van $\rho\delta$ szomszédjuk) számát, $b(l)$-el a többi él számát ezen a szinten. Ekkor $a(0) = 2$, $b(0) = 0$ és könnyen látszik a rekurzió: $a(l) = b(l-1)$ és $b(l) = 2a(l-1) + b(l-1)$. Ezt a rekurziót megoldva egy zárt képletet kapunk $a(l)$-re: $a(l) = \frac{4(2^l-(-1)^l)}{3}$. Jelöljük u_i-vel azon klózok számát, amelyben x_i nem negálva szerepel és n_i-vel azon klózok számát, amelyekben x_i negálva szerepel. Válasszuk az x_i-hez tartozó fa magasságát a legkisebb olyan h_i értéknek, amelyre teljesül, hogy $a(h_i) \geq 2max(u_i, n_i)$. Legyen r_i két gyereke v_i és w_i nevezzük igaz levélnek azokat a $\rho\delta$-leveleket, amelyekre a $\rho = 1$ teljesül, ha az $r_i v_i$ és v_i felé van irányítva és hívjuk hamisnak azokat a $\rho\delta$-leveleket, amelyekre $\delta = 1$ teljesül, ha az $r_i v_i$ és v_i felé van irányítva.

Minden C_i klózhoz vegyünk fel még három új csúcsot: v_{C_i}, w_{C_i} és z_{C_i}. Legyen $\delta(w_{C_i}) = \delta(z_{C_i}) = \rho(w_{C_i}) = \rho(z_{C_i}) = 1$ és $\rho(v_{C_i}) = 3$ és $\delta(v_{C_i}) = 2$, valamint $\theta(v_{C_i}) = \theta(w_{C_i}) = \theta(z_{C_i}) = 0$. Továbbá v_{C_i} legyen összekötve w_{C_i}-vel és z_{C_i}-vel, valamint minden x_i-re az x_i-hez tartozó fa egy olyan igaz levelével, amellyel más klózhoz tartozó csúcs nincs összekötve, ha x_i nem negálva szerepel C_i-ben és az x_i-hez tartozó fa egy olyan hamis levelével, amellyel más klózhoz tartozó csúcs nincs összekötve, ha x_i negálva szerepel C_i-ben. Ezt meg tudjuk tenni, mert az x_i-hez tartozó fát akkorára választottuk, hogy legyen legalább u_i igaz levele és legalább n_i hamis levele. (Az igaz és hamis levelek száma is $\frac{a(h_i)}{2}$.)

Végül ahhoz, hogy a gráfban a fokszámok rendben legyenek, másoljuk le az eddig létre hozott gráfot, vagyis minden v-re vegyünk föl egy v' csúcsot, v' legyen összekötve w'-vel, ha v össze van kötve w-vel és v-t pontosan akkor kössük össze v'-vel, ha $d(v) < \rho(v) + \delta(v) + \theta(v)$ az előírt fokokra. (Ezeknek az éleknek a behúzásával már minden csúcsra egyenlőség fog fennállni.) Végül a fokszám előírás az új csúcsokon a következőképpen alakuljon: $\rho(v') = \delta(v), \delta(v') = \rho(v)$ és $\theta(v') = \theta(v)$. Ezzel elkészült a gráf konstrukciója és a gráf méretének vizsgálatakor azt is megállapíthattuk, hogy ez egy polinomiális visszavezetés.

9. Állítás. *Az így megkonstruált gráfnak pontosan akkor van jó irányítása, ha a hozzá tartozó konjunktív normálforma kielégíthető.*

Bizonyítás. Ha a konjunktív normálforma kielégíthető, akkor vegyünk egy igaz kiértékelést, és annak megfelelően irányítsuk meg a gráfot: az x_i-hez tartozó fában az $r_i v_i$ él pontosan akkor mutasson a v_i felé, ha x_i a kiértékelésben igaz, a fa minden élét úgy irányítsuk meg, hogy az megfeleljen a fokszám előírásoknak, a lemásolt fában, $v'w'$ akkor mutasson v' felé, ha az eredeti fában a vw él w fele mutatott, a levelekből kimenő élek szintén mutassanak arra, amerre mutatniuk kell a fokszám előírás teljesüléséhez. Ez mindenhol teljesíthető, mert, ha egy levélből a saját másolatába megy él, akkor azt pont úgy tudjuk megirányítani, hogy mindkét csúcsnak jó legyen. Ezzel a fa pontjain teljesülnek az előírt feltételek. Minden v_{C_i}-re a w_{C_i}-be és z_{C_i}-be menő élek közül annyit irányítsunk v_{C_i} felé, hogy v_{C_i}-be pont 3 él menjen (így nyilván kettő él fog kilépni belőle). A $v'_{C_i}, w'_{C_i}, z'_{C_i}$ csúcsok között pont minden élt pont fordított irányba irányítsunk meg. Így nyilván a v_{C_i} és v'_{C_i} csúcsokra is teljesül a fokszám előírás. És végül w_{C_i} és w'_{C_i}, illetve z_{C_i} és z'_{C_i} csúcsok között úgy húzzunk be élt, hogy mindkettőnek a fokszáma megfeleljen az előírásnak. Ez pont megtehető, mert w_{C_i}-be pontosan akkor lép be él, ha w'_{C_i}-ből kilép, z_{C_i}-re és $z'_{C_i} - re$ ugyanígy. Így minden élt megirányítottunk és minden csúcsra teljesül a fokszám előírás, így az egyik irányt beláttuk. □

Ha a gráfot meg lehet irányítani, akkor vegyük egy jó megirányítását, és legyenek azok az x_i változók igazak a konjunktív normálformában, amelyekhez tartozó részfában az $r_i v_i$ él v_i felé van irányítva. Ez egy jó kiértékelése lesz a normálformának, ugyanis minden C_i klózra a v_{C_i} csúcs befoka 3, ami csak úgy lehet, ha van olyan x_j-hez tartozó fa, aminek leveléből megy él v_{C_i}-be, ami csak úgy lehet, ha x_j-t igaznak választottuk és a C_i klózban nem tagadva szerepel, vagy, ha x_j-t hamisnak választottuk, de a C_j klózban tagadva szerepel. Ami azt jelenti, hogy minden klóz igaz lesz (vagy igaznak választott változó, vagy hamisnak választott változó tagadása lesz a klózban). Vagyis így egy jó kiértékelés kapunk. □

■

10. Megjegyzés. Megfigyelhető, hogy a bizonyítás során egy páros gráfot konstruáltunk, hiszen színezzük meg a v_{C_i} csúcsokat az egyik színnel, a w_{C_i} és z_{C_i} csúcsokat másik színnel, illetve az x_i literálokhoz tartozó fák leveleit is másik színnel, onnantól kezdve pedig a fát szintenként váltakozó színnel, végül a gráf tükrözött példányában színezzünk minden csúcsot ellenkező színűre, mint az eredetije volt. Így egy jó színezést kapunk. Ebből a megfigyelésből láthatjuk, hogy tulajdonképpen a bizonyításból következik az az erősebb állítás is, hogy ha egy *páros* gráfnak adva van egy kifok, befok, irányítatlan fok előírása, NP-teljes eldönteni, hogy van-e a gráfnak olyan irányítása, amely teljesíti a fokszám előírásokat. Sőt a következő állításból láthatjuk, hogy még egy ennél erősebb állítás is igaz (bár ennek bizonyítása eltér az előzőtől).

11. Definíció. BIPARTITE PARTIAL ORIENTATION (BI-PO): Adott egy teljes páros gráf és minden csúcsán adott egy kifok, egy befok és egy irányítatlan fok előírás. Kérdés, hogy az éleket megirányítva elérhető-e a kívánt fokszám előírás?

12. Állítás. *A BI-PO feladat NP-teljes.*

Bizonyítás.

13. Definíció. 3-COLOR TOMOGRAPHY PROBLEM (3-CTP): adott egy mátrix és 3 szín, valamint a mátrix minden sorához (ill. oszlopához) és egy színhez egy egész szám 0 és az oszlopszám (ill. sorszám) között. Kérdés: létezik-e olyan színezése a mátrix elemeinek, amelyre minden szín annyiszor szerepel egy sorban (ill. oszlopban), mint amennyi az adott színhez és adott sorhoz (ill. oszlophoz) rendelt szám?

14. Megjegyzés. [4] A 3-CTP feladat NP-teljes.

A 3-CTP feladatot fogjuk visszavezetni a BI-PO feladatra. Mivel az előbbi NP-teljes, ez elég az állítás bizonyításához.

Tekintsük azt a teljes páros gráfot, amelynek az egyik ponthalmaza (O) az oszlopoknak, a másik ponthalmaza (S) a soroknak felel meg. Legyenek az egyszerűség kedvéért a színeink nevesítve: piros, kék, sárga. Egy O-beli csúcsra legyen a befok előírás az oszlopban a piros előírás, a kifok előírás legyen az oszlopban előírt kék elemek száma és az irányítatlan fok legyen az oszlopban a sárga színű elemekre előírt érték. Egy S-beli csúcsra a kifok legyen a piros, a befok legyen a kék és az irányítatlan fok a sárga elemek az adott sorban előírt értéke.

Világos, hogy ha van egy jó színezés, akkor a piros elemeknek megfelelő éleket O-fele, a kékeknek megfelelőket S-fele irányítva és a mátrix sárga elemeinek megfelelő éleket irányítatlanul hagyva egy jó irányítást kapunk, valamint ha van egy jó irányításunk, akkor az O-fele mutató éleknek megfelelő elemeket pirosra, az S-fele mutató éleknek megfelelő elemeket kékre és az irányítatlan éleknek megfelelő elemeket sárgára színezve egy jó színezését kapjuk a mátrixnak. Vagyis egy teljes páros gráf pontosan akkor irányítható jól, ha a neki megfelelő mátrix jól színezhető, így ennek az eldöntése NP-teljes. ■

15. Definíció. PLANAR PARTIAL ORIENTATION (PL-PO): Adott egy síkgráf és minden csúcsán adott egy kifok, egy befok és egy irányítatlan fok előírás. Kérdés, hogy az éleket megirányítva elérhető-e a kívánt fokszám előírás?

16. Állítás. *[12] A PL-PO feladat NP-teljes.*

17. Megjegyzés. Ugyan az előző állítással nem tudjuk összehasonlítani, de ez az állítás is erősebb, mint a PARTIAL ORIENTATION NP-teljessége, hiszen, ha a PL-PO feladat NP-teljes, akkor a PRTIAL ORIANTATION feladat is.

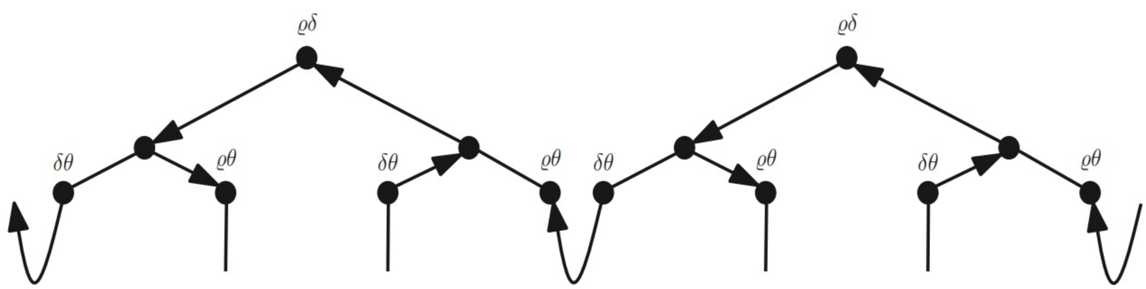
Bizonyítás. A PL-1-EX3MONOSAT feladatot fogjuk visszavezetni a PL-PO feladatra, és mivel ez a feladat NP-teljes, így a PL-PO is az.

18. Definíció. PL-1-EX3MONOSAT: Adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz pontosan három literált tartalmaz, amelyek egyike sem negált. Továbbá a konjunktív normálformának van egy síkbeli ábrázolása, azaz létezik hozzá egy páros síkgráf, amely egyik pontosztálya a klózoknak, másik pontosztálya a literáloknak felel meg, és két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha az adott literál szerepel az adott klózban. Kérdés, hogy a konjunktív normálforma kielégíthető-e úgy, hogy minden klózban pontosan egy igaz literál legyen.

19. Megjegyzés. [7] A PL-1-EX3MONOSAT feladat NP-teljes.

Hasonló gráfot fogunk konstruálni, mint a PARTIAL ORIENTATION feladat NP-teljességének bizonyításánál. Ugyanaz a konstrukció nem működik, mert az abban a bizonyításban konstruált gráf nem feltétlen síkgráf. Ugyan a fákon nem kellene változtatnunk, mert azok síkgráfok, sőt még az klózokhoz felvett csúcsokon sem kellene változtatnunk, mert a feladatban szereplő konjunktív normálformának van egy síkbeli ábrázolása, és ha annak megfelelően rakjuk le a literáloknak megfelelő fákat, és kötjük össze a megfelelő csúcsokat, továbbra is síkgráfot kapunk. Sajnos a tükrözött rész megalkotásánál semmi nem garantálja, hogy a gráf síkgráf maradjon.

Az új konstrukciónkban, ha egy literál t klózban szerepel, akkor készítsünk hozzá egy gráfot a következőképpen: vegyük t példányt a PARTIAL ORIENTATION NP-teljességének bizonyításában definiált fákból, úgy, hogy mindegyiknek három szintje legyen megépítve (7 csúcsú gráfok lesznek) és ezeket kapcsoljuk össze egy körben - az i-edik fa legjobboldalibb csúcsa legyen összekötve az $(i+1)$-edik fa legbaloldalibb csúcsával, illetve a t-edik fa legjobboldalibb csúcsa legyen összekötve az első fa legbaloldalibb csúcsával. [2. ábra] Egy ilyen komponensnek két lehetséges irányítása van, ami teljesíti a fokszám előírásokat vagy $2t$ irányítatlan él jön ki a komponensből vagy t irányított élpár, ahol a mindig pár egyik tagja befele (a komponens fele), másik tagja kifele (a komponensből kilépve) van irányítva. Hívjuk azt az igaz irányításnak, amikor irányítatlan élek jönnek ki.



2. ábra. A fa több példányának összekötése

Minden klózhoz vegyünk föl egy v_C csúcsot, amelyre a fokszám előírások: $\rho(v_C) = \delta(v_C) = \theta(v_C) = 2$. Minden csúcsból, ami szerepel a C klózban, az egyik élpárt kössük össze v_C-vel. Így egy síkgráfot kapunk, mert a konjunktív normálformának van síkbeli ábrázolása és ez a gráf pontosan akkor lesz jól irányítható, ha van a konjunktív normálformának egy olyan kielégítése, amelyben minden klózban pontosan egy igaz literál szerepel. Vagyis az állítást beláttuk. ■

Azt láthatjuk a fenti állításokból, hogy ez egy jóval nehezebb feladat, mintha csak irányított élek lehetnek: nem csak általános gráfra NP-teljes, hanem egészen speciális gráfosztályokra is. Az előző részre visszagondolva felmerülhet a kérdés, hogy mi a helyzet, ha a teljes bajnokságot lejátszották, a végső állásról tudunk-e valamit mondani?

Meglepő módon az összes eddigi példánkkal ellentétben a teljes gráfra P-ben van a feladat:

20. Definíció. COMPLETE PARTIAL ORIENTATION (C-PO): Adott egy teljes gráf és minden csúcsán adott egy kifok, egy befok és egy irányítatlan fok előírás. Kérdés, hogy az éleket megirányítva elérhető-e a kívánt fokszám előírás?

21. Állítás. *A C-PO feladat P-ben van.*

Bizonyítás. A megfelelő irányítás létezéséhez szükséges és elégséges feltétel, hogy a kifok, befok és irányítatlan fok előírások összege $n-1$ legyen és legyen egy olyan n pontú irányított egyszerű gráf, amelyre a befok és kifok előírás teljesül. Hiszen ha van egy jó irányítás, akkor az irányítatlan éleket elhagyva pont egy ilyen irányított gráfot kapunk, ha pedig van egy ilyen irányított gráf, akkor ezt teljes gráffá kiegészítve szükségszerűen teljesülniük kell az irányítatlan fok előírásoknak is. Mivel az első feladat ellenőrzése triviális, ezért, ha a második feltételt polinomiális időben tudjuk ellenőrizni, akkor C-PO is polinomiális. A második feltételt pedig a következő lemma szerint tudjuk polinomiális időben ellenőrizni. ■

22. Lemma. *[11] A nemnegatív egész $d_1^+, \dots, d_n^+, d_1^-, \dots, d_n^-$ számok ki-, és befok sorozata egy egyszerű gráfnak (a v csúcs kifoka d_v^-, befoka d_v^+), pontosan akkor ha $\sum_{i=1}^n d_i^+ = \sum_{i=1}^n d_i^-$ és minden $I, J \subset \{1 \dots n\}$-re $\sum_{i \in I} d_i^+ \leq \sum_{i \in J} d_i^- + |I|(n-|J|) - |I-J|$ és ez polinomiális időben ellenőrizhető.*

Bizonyítás. A feladatot egy folyamfeladatra vezetjük vissza: Vegyük fel az $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ és $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ csúcsokat, u_i és v_j között menjen él, ha $i \neq j$. Vegyünk még föl egy s és egy t csúcsot su_i, v_it legyen él minden $i \in \{1, \dots, n\}$-re. A kapacitás az su_i éleken legyen d_i^-, az u_iv_j éleken legyen 1, és a v_jt éleken legyen d_i^+. Egyszerűen látható, hogy pontosan akkor van megfelelő irányított gráf, ha a maximális folyamérték $\sum_{i=1}^n d_i^+ = \sum_{i=1}^n d_i^-$. Ez pedig polinomiális időben ellenőrizhető. ■

2.3. Fokszámelőírás részgráfokon

Az eddigi kérdésekre úgy tekinthetünk, mintha lenne egy bajnokság (melyben esetleg nem mindenki játszik mindenkivel) és azt vizsgáltuk, hogy el tudjuk-e dönteni egy győzelem, vereség, döntetlen hármasokból álló sorozatról, hogy az egy lehetséges végeredmény-e. Kérdezhetjük ugyanakkor azt is, hogy a forduló során valamikor előállhat-e az adott hármasokból álló sorozat. (Az így keletkező kérdések közül persze több egybe fog esni a már feltett kérdésekkel de új kérdéseket is nyerünk.)

	Teljes gráf	Tetszőleges gráf	Teljes páros gráf	Páros gráf
(A) Minden meccs lejátszva	P-beli *(21. Állítás)*		NP-teljes *(12. Állítás)*	
(B) Adott részgráf lejátszva		NP-teljes *(6. Tétel)*		NP-teljes *(10. Megjegyzés)*
(C) - Ismeretlen részgráf döntetlenek nélkül	P-beli *(21. Állítás)*	NP-teljes *(mert már teljes páros gráfra is az)*	NP-teljes *(12. Állítás)*	NP-teljes *(mert már teljes páros gráfra is az)*
(D) - Ismeretlen részgráf döntetlenekkel	Nyitott	NP-teljes *(mert már az (A) kérdésre is az)*	NP-teljes *(mert már az (A) kérdésre is az)*	NP-teljes *(mert már az (A) kérdésre is az)*

3. ábra. Összefoglaló táblázat a részgráfokra vonatkozó feladatok megoldhatóságáról

Az alábbi kérdéseket vizsgáljuk:

(A) - Minden meccs lejátszva: Adott valamilyen gráf és minden élét meg kell irányítani (azt is irányításnak vesszük, ha eldöntjük egy élről, hogy irányítatlan). [Ez annak felel meg, ha egy adott típusú bajnokságban minden meccset lejátszottak.]

(B) - Adott részgráf lejátszva: Adott valamilyen gráf és annak egy részgráfja, ezen a részgráfon van-e megfelelő irányítás. [Egy bajnokság közben adott meccsek lejátszása után lehet-e egy adott állás.]

(C) - Ismeretlen részgráf döntetlenek nélkül: Adott egy gráf, van-e olyan részgráfja, aminek az előírtak a ki- és befokai. [Néhány meccset már lejátszottak, de nem tudjuk, ki játszott kivel, döntetlen nem lehetett, lehetséges-e most egy adott állás.]

(D) - Ismeretlen részgráf döntetlenekkel: Adott egy gráf, van-e olyan részgráfja, aminek az előírtak a ki-, be- és irányítatlan fokai. [Néhány meccset már lejátszottak, de nem tudjuk, ki játszott kivel, döntetlen is lehetett, lehetséges-e most egy adott állás.]

Az (A) kérdést megválaszoltuk az előző fejezetben teljes gráfra, tetszőleges gráfra, páros gráfra és teljes páros gráfra. A (B) kérdés a tetszőleges gráf és a teljes gráf esetén is az (A) résznek a tetszőleges gráfra feltett kérdésével ekvivalens, míg a páros és teljes páros gráfok esetén ez a kérdés az (A) kérdés páros gráfra vonatkozó kérdésével ekvivalens. A (C) kérdés teljes gráfra, illetve teljes páros gráfra ugyanaz, mint az (A) kérdés ezekre a gráfokra. A (C) kérdés nyilván tetszőleges páros gráfra és tetszőleges gráfra is NP-teljes, ha már teljes páros gráfokra az. A (D) kérdés NP-teljes minden gráf osztályra, amelyre az (A) kérdés NP-teljes, ugyanis ez annak egy erősebb változata: ha úgy választjuk meg a ki-, be-, és irányítatlan fokokat, hogy az összegük rendre a gráf fokszámait adják, akkor a kérdés pont az (A) kérdéssel ekvivalens. Érdekes módon a teljes gráfra olyannyira nem egyszerű a kérdés, hogy egyelőre nem ismerjük rá a választ.

Nyitott kérdés: Egy n pontú teljes gráfban van-e olyan részgráf, ami teljesít egy adott ki-, be-, és irányítatlan fok előírást?

3. Legjobb/legrosszabb helyezés becslése

3.1. Adott csúcs legjobb helyezésének becslése

Tekintsünk egy versenyt, ahol csapatok játszanak egymással előre meghatározott terv szerint. Kezdetben minden csapatnak nulla pontja van. Egy csapat egy mérkőzés végén α pontot kap, ha veszít, β pontot, ha döntetlent játszik, és γ pontot, ha nyer. (Feltesszük, hogy $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in \mathbb{R}$.) Ekkor a játék szabálya (pont osztási szabálya): (α, β, γ). Például régen a focimeccseket (0,1,2)-szabállyal játszották, mostanában (0,1,3)-szabállyal játsszák.

Adott egy verseny, és kíváncsiak vagyunk, hogy egy adott T_0 csapatnak van-e még esélye győzni. Ekkor az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy a továbbiakban a T_0 csapat minden meccset megnyer. Legyen T_0-nak az így elérhető maximális pontszáma s_0 és $i \neq 0$-ra s_i a T_i csapat aktuális pontszáma plusz α-szor a T_i csapat T_0 csapattal játszandó hátralevő mérkőzéseinek száma. A kérdés ekkor úgy fogalmazható meg, hogy befejeződhet-e a verseny úgy, hogy a továbbiakban a T_i csapat, a nem T_0-lal játszott meccsein legfeljebb $c_i := s_0 - s_i$ pontot szerez?

Ezt egy G=(V,E) (multi)gráffal tudjuk modellezni, G csúcsai legyenek a T_0-tól különböző csapatok, és minden hátralévő meccshez tartozzon pontosan egy él. Minden $i \in V$ csúcson legyen egy $c_i \in \mathbb{R}$ kapacitás, egy meccs eredményét a meccset reprezentáló él megirányításával feleltetjük meg.

23. Definíció. SPORTS COMPETITION (SC(α, β, γ)): Adott egy G=(V,E) multigráf és egy csúcskapacitás $c \in \mathbb{R}^V$. Kérdés, hogy a gráf élei megirányíthatók-e úgy, hogy minden $i \in V$ csúcsra teljesüljön, hogy $\alpha\delta(i)+\beta\theta(i)+\gamma\rho(i) \leq c_i$? (Ahol szokás szerint $\rho(i)$ jelöli az i csúcsba belépő élek számát, $\delta(i)$ a kilépő élek számát és $\theta(i)$ az irányítatlanokét, valamint megirányításnak tekintem azt is, ha egy élről eldöntöm, hogy az irányítatlan marad.)

24. Megjegyzés. Cook megmutatta [3], hogy ha nem engedünk meg döntetleneket, akkor a feladat polinomiális időben megoldható. Ez a bizonyítás egy folyamfeladatra vezette vissza a kérdést. Azt sem lenne bonyolult ismertetni, de Hakimi irányítási tételeivel egy még egyszerűbb gondolatmenettel láthatjuk be az állítást.

25. Állítás. *Ha a megirányítás során egyik élt sem választhatjuk irányítatlannak, akkor a feladat P-ben van.*

Bizonyítás. Minden csúcsnak ismerjük a fokszámát (d_i). Az eredeti kérdés a következőre módosul: Létezik-e olyan megirányítás, amelyre $\alpha\delta(i) + \gamma\rho(i) \leq c_i$? Vagyis (mivel $\delta(i) = d_i - \rho(i)$) a feltétel a következővel ekvivalens: $\alpha(d_i - \rho(i)) + \gamma\rho(i) \leq c_i$, azaz $\rho(i) \leq \frac{c_i - \alpha d_i}{\gamma - \alpha}$. (Az $\alpha = \beta = \gamma$ eset nem érdekes számunkra, mert ez a $d_i \leq \alpha c_i$ feltétel ellenőrzését kívánja csak meg.) Válasszuk a g függvényt a csúcshalmazon úgy, hogy $g(i) := \left\lfloor \frac{c_i - \alpha d_i}{\gamma - \alpha} \right\rfloor$. Akkor és csak akkor van megfelelő megirányítás, ha van olyan megirányítása a gráfnak, melyre $\rho(i) \leq g(i)$ minden i csúcsra.
Ez a feladat már ismerős lehet, hiszen nagyon hasonló a 2. és 3. Állításhoz. Ezeket az állításokat általánosabb kontextusba is lehet helyezni. Az első fejezetben ezt nem tettük meg, mert az adott kérdések megválaszolásához bőven elég volt ezt a két állítást kimondani, ettől függetlenül az általánosabb kérdésekre is ismertek a válaszok a témakörben. A két állításhoz teljesen hasonló szükséges és elégséges feltételeket lehet adni azokban az esetekben is, ha a kifokra (vagy befokra) alsó (vagy felső) korlát van megadva és a megfelelő polinomiális algoritmus létezése is mindkét esetben fennáll. ■

26. Megjegyzés. Egy tetszőleges SC(α, β, γ) feladat megfelel egy SC$(0, \beta - \alpha, \gamma - \alpha)$ feladatnak. Ha az eredeti feladathoz a G gráf tartozott a c kapacitás függvénnyel, akkor az újhoz ugyanaz a G gráf jó lesz egy c' kapacitás függvénnyel, ahol $c'_i = c_i - \alpha d(i)$, ahol $d(i)$ szokás szerint az i csúcsból kiinduló összes él száma. Továbbiakban egy SC(α, β, γ) feladatot normáltnak hívunk, ha $\alpha = 0 \leq \beta \leq \gamma$.

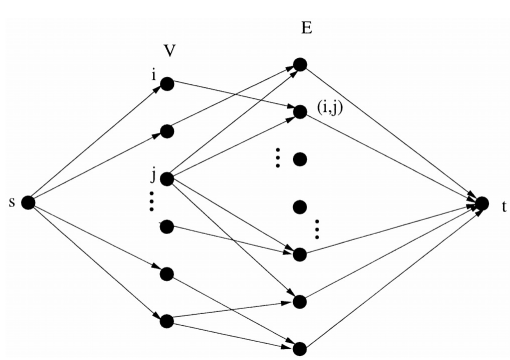
27. Tétel. *[8] SC(α, β, γ) feladat polinomiális az alábbi három esetben és minden más esetben NP-teljes:*
(1) $\alpha = \beta$,
(2) $\beta = \gamma$,
(3) $\alpha + \beta = 2\gamma$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy SC(α, β, γ) egy normált feladat. (A normálás az (1), (2) és (3) feltételek egyikét sem rontja el.)

(1) triviálisan igaz: ha $\alpha = \beta = 0$, akkor egy (G, c) gráf súlyozás párra pontosan akkor van megoldás, ha $c \geq 0$. (Nyilván, ha van olyan c_i, amelyik kisebb, mint nulla, akkor nem található jó irányítás, ha pedig $c \geq 0$, akkor minden él legyen irányítatlan és azonnal teljesül a feltétel: $\alpha 0 + 0d(i) + \gamma 0 = 0 \leq c_i$.)

A továbbiakban $\beta > 0$, így feltehető, hogy $\beta = 1$ (oszthatjuk β-t, γ-t valamint c-t β-val.)

(2) $\beta = \gamma = 1$.
Ha a G=(V,E) gráfnak (a $c \in \mathbb{R}^V$ súlyozással) van jó irányítása, akkor van olyan is, amelyben nem hagyjuk az egyik élt sem irányítatlanul, ezért feltehető, hogy minden élt megirányítunk. Vegyünk fel egy irányított segédgráfot: tartozzon 1-1 csúcsa minden $i \in V$-hez (legyen ez az új csúcshalmaz V' része) és minden $(i, j) \in E$-hez (E'), valamint legyen egy s és egy t csúcsa. Az s csúcsból menjen él minden V'-beli csúcsba, minden E'-beli csúcsból menjen t-be egy él, és egy V'-beli csúcsból pontosan akkor menjen egy E'-beli csúcsba irányított él, ha a V'-beli csúcsnak megfelelő V-beli csúcs az E'-beli csúcsnak megfelelő E-beli él egyik végpontja. [4. ábra]



4. ábra. Segédgráf

Az s-ből kimenő éleken legyen 0 alsó korlát és $\lfloor c_i \rfloor$ felső korlát, ha az él az $i \in V$ csúcshoz tartozó csúcsba megy. A V'-ből E'-be menő éleken legyen 0 az alsó korlát, 1 a felső korlát, a t-be menő éleken legyen 1 az alsó és a felső korlát is. Az így kapott folyam feladatban pontosan akkor van megengedett $s-t$ folyam, ha SC(α, β, γ)-nak az adott (G,c) párra van megoldása. (A folyam mérete $|V| + 3|E|$ méretű, tehát polinomiális.) $(i,(i,j))$-n akkor legyen 1 a folyamérték, ha i megnyerte a T_iT_j meccset. (Ekkor E' és t között is nyilván teljesül a feltétel, mert pontosan az egyik csapat nyerte meg a meccset és s és V' között pontosan akkor egészíthető ki a folyam, ha az i-edik csapat legfeljebb $\lfloor c_i \rfloor$ meccset nyert.)

(3) $\beta = 1, \gamma = 2$

Ugyanazt a segédgráfot használjuk, mint (2) bizonyításánál. A kapacitások pedig a következőképpen változnak: V' és E' között az alsó korlát maradjon 0 a felső legyen 2, az E' és t között menő éleken az alsó és a felső korlát is legyen 2. Ahhoz, hogy (i,j) és t között 2 folyamérték menjen, vagy (i,(i,j))-n és (j,(i,j))-n is 1 folyamérték megy keresztül vagy az egyiken 2 a másikon nulla (mivel minden kapacitás egész, ezért ha van megengedett folyam, van megengedett egész értékű folyam is). A két eset egyértelműen megfelel a döntetlennek, illetve i vagy j győzelmének.

(4) $\beta = 1, \gamma > 2$.

Az NP-teljesség bizonyításához a 3-dimenziós párosítás (3-DIMENSIONAL MATCHING) problémát fogjuk visszavezetni erre a feladatra.

28. Definíció. 3-DIMENSIONAL MATCHING: Adottak az X, Y, Z véges, diszjunkt halmazok, $|X| = |Y| = |W| = q$. Legyen $R \subseteq X \times Y \times W$. Kérdés, hogy létezik-e $R' \subseteq R$, $|R'| = q$, amire R'-nek tetszőleges két eleme minden koordinátában különbözik egymástól?

29. Megjegyzés. [5] A 3-DIMENSIONAL MATCHING feladat NP-teljes.

30. Megjegyzés. Természetesen minden $z \in X \cup Y \cup W$-re pontosan egy olyan $r \in R'$ lesz, amelynek a megfelelő koordinátája z. (A továbbiakban arra, ha $r \in R$ megfelelő koordinátája z a $z \in r$ jelölést használjuk.)

A visszavezetéshez egy G=(V, E) segédgráfot konstruálunk a következőképpen:

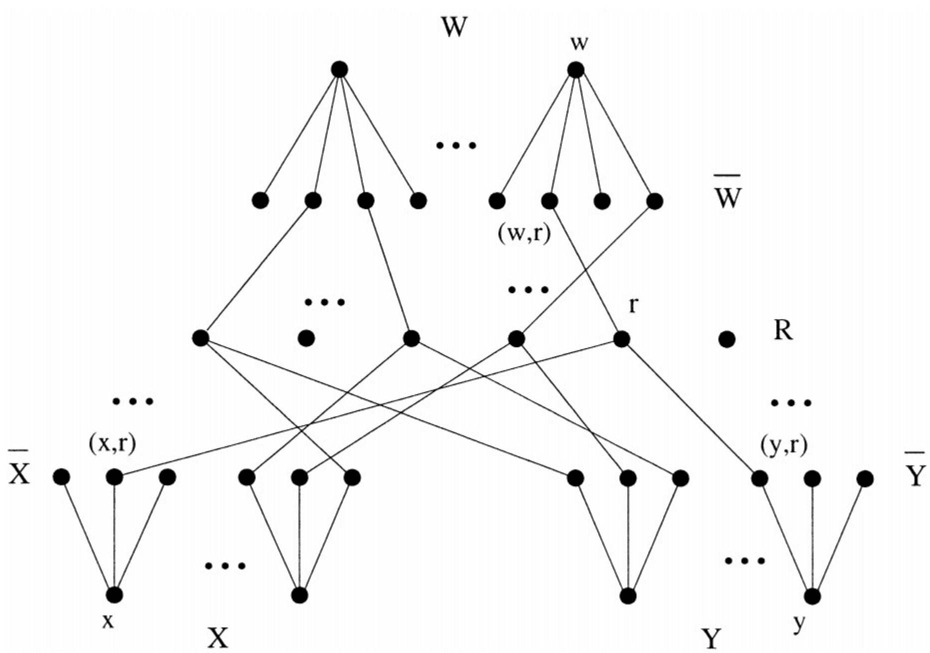
$V := X \cup Y \cup W \cup \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{W} \cup R$, ahol

$\overline{X} := \{(x, r) | x \in X, r \in R, x \in r\}$,

$\overline{Y} := \{(y, r) | y \in Y, r \in R, y \in r\}$,

$\overline{W} := \{(w, r) | w \in W, r \in R, w \in r\}$.

$E := \{(x, (x, r)) | (x, r) \in \overline{X}\} \cup \{(y, (y, r)) | (y, r) \in \overline{Y}\} \cup \{(w, (w, r)) | (w, r) \in \overline{W}\} \cup$
$\cup \{(r, (x, r)) | (x, r) \in \overline{X}\} \cup \{(r, (y, r)) | (y, r) \in \overline{Y}\} \cup \{(r, (w, r)) | (w, r) \in \overline{W}\}$ [5. ábra]



5. ábra. Segédgráf

Továbbá megadunk egy $c \in \mathbb{R}^V$ kapacitást a csúcsokon: $c \equiv 1$ az $X \cup Y \cup \overline{W}$ halmazon, $c \equiv 1 + \gamma$ az $\overline{X} \cup \overline{Y}$-on, $c \equiv max\{\gamma, 3\}$ az R-en és $c \equiv \gamma(d-1)+1$ a W-n, ahol d az adott pont fokát jelöli.

31. Állítás. *Az így megkonstruált G=(V,E) gráfnak pontosan akkor van jó megirányítása, ha R-ben van jó párosítás.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $R' \subseteq R$ egy jó matching. A hozzá tartozó irányítást a következőképpen definiáljuk: minden $w \in W$ csúcsra egyértelműen létezik egy $r' \in R'$, amire $(w, r') \in \overline{W}$ a $(w, (w, r'))$ élt hagyjuk irányítatlanul, a többi $(w, (w, r))$ alakú él pedig menjen $\overline{W}$-ből w-be. Ezzel W-re teljesül a fokszám előírás: 1 döntetlent játszik és $(d-1)$-et nyer: $1 \cdot 1 + \gamma(d-1)$.
Minden $r' = (x, y, w) \in R'$-re az $(r', (w, r'))$ él menjen (w, r')-ből r'-be, az $(r', (x, r'))$ és $(r', (x, r'))$ élek pedig menjenek r'-ből $\overline{X}$-ba illetve $\overline{Y}$-ba. Minden $r \in R \setminus R'$ csúcsban végződő él legyen irányítatlan. Ezzel teljesül a feltétel $\overline{W}$-on és R-en is. ($\overline{W}$-on egy csúcs vagy (w, r') alakú, akkor W felől megy bele egy irányítatlan él és a másik él kifele megy belőle, vagy (w, r) alakú, akkor R felől megy bele egy irányítatlan él és a másik él kifele megy belőle, R-en pedig: az R'-beli csúcsokba egy él megy be a többi ki, az $R \setminus R'$-n pedig 3 irányítatlan él megy be.)
Végül X és $\overline{X}$ között minden él mutasson $\overline{X}$ felé, kivéve, az $(x, (x, r'))$ esetet, ekkor hagyjuk az élt irányítatlanul. És Y valamint $\overline{Y}$ között is ugyanígy irányítsuk meg az éleket, ez az irányítás X-en, $\overline{X}$-on, Y-on és $\overline{Y}$-on is teljesíti a feltétel.
Tehát, ha R-ben van jó párosítás, akkor a G gráfnak van jó irányítása. □

Most tegyük fel, hogy van egy irányításunk, ami teljesíti az előírásokat. Ekkor minden $x \in X$-re $\delta(x) \geq d(x) - 1$ és $\rho(x) = 0$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\delta(x) = d(x) - 1$. (Hiszen, ellenkező esetben egy tetszőleges x-ből kilépő élt irányítatlanná változtatva továbbra is jó irányítást kapunk.) Ugyanez igaz az $y \in Y$ elemekre is. Az $\overline{X}$-beli csúcsok foka 2 és a kapacitásuk $1 + \gamma$ így ismét az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy minden $\overline{X}$-beli csúcsra $\rho = 1$, $\theta = 1$. (Ellenkező esetben az előző esethez hasonlóan módosítjuk az irányítást a feltételek megsértése nélkül.)
A fenti konstrukcióban láthatóan $|X|$ irányított él megy $\overline{X}$ és R között, sőt, ha $((x, r), r)$ és $((x', r'), r')$ is irányított, akkor $x \neq x'$. Ugyanez végigcsinálható $\overline{Y}$-ra is.
Hasonlóan érvelve az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy minden $w \in W$-re $\rho(w) = d(w) - 1$ és $\theta(w) = 1$ (ellenkező esetben módosítjuk az irányítást). Mivel $\overline{W}$-ban minden csúcs foka 2 és a kapacitás minden csúcson 1, feltehető, hogy R és $\overline{W}$ között pontosan $|W|$ darab irányított él van és, ha $((w, r), r)$ és $((w', r'), r')$ is irányított, akkor $w \neq w'$.

Végül figyeljük meg, hogy egy $r \in R$ csúcsra $\rho(r)$ csak úgy lehet legalább 1, ha $\delta(r)$ legalább 2.

Így $R' := \{r \in R | \rho(r) = 1\}$ egy jó párosítás. $\square$

(5) $\beta = 1 < \gamma < 2$

Az előző esethez hasonlóan lehet bizonyítani az NP-teljességet, a G gráfon a kapacitást kell egy kicsit módosítani: $c \equiv 1$ az $\overline{X} \cup \overline{Y} \cup W$ halmazon, $c \equiv 1 + \gamma$ az $\overline{W}$-on, $c \equiv max\{2\gamma, 3\}$ az R-en és $c \equiv \gamma(d-1) + 1$ az $X \cup Y$-on. Ezzel az új kapacitás függvénnyel (G,c)-nek pontosan akkor lesz jó irányítása, ha R-ben van jó párosítás.

■

32. Megjegyzés. A fenti eredményből következik, hogy a három speciális esettől eltekintve annak eldöntése, hogy egy csapatnak van-e még esélye elérni a K-adik helyet szintén NP-teljes, hiszen ez a kérdés az előbbi feladat általánosítása. (Így értelemszerűen lehet visszavezetni rá az SC(α, β, γ) feladatot, illetve a feladat NP-belisége is világos.) Továbbá az is nyilvánvaló, hogy $(0, 0, 1)$-szabályra a feladat P-beli (a súlyfüggvény legfeljebb $(K-1)$ helyen vehet fel negatív értéket).

3.2. Adott csúcs legrosszabb helyezésének becslése

Persze nem csak az lehet érdekes, hogy melyik csapat érhet el jó eredményt, hanem az is, hogy van-e olyan eredmény egy adott csapatra nézve, aminél rosszabbat biztos nem érhet el a csapat. Ez a kérdés nagyon hasonló, mint az, hogy milyen jó eredményt érhet el a csapat, de a pontozás aszimmetriája miatt a két kérdés nem komplementere egymásnak. A legjobb helyezés NP-teljességének bizonyítása után még 15 évnek kellett eltelnie, hogy belássák, a legrosszabb helyezés elérése co-NP-teljes.

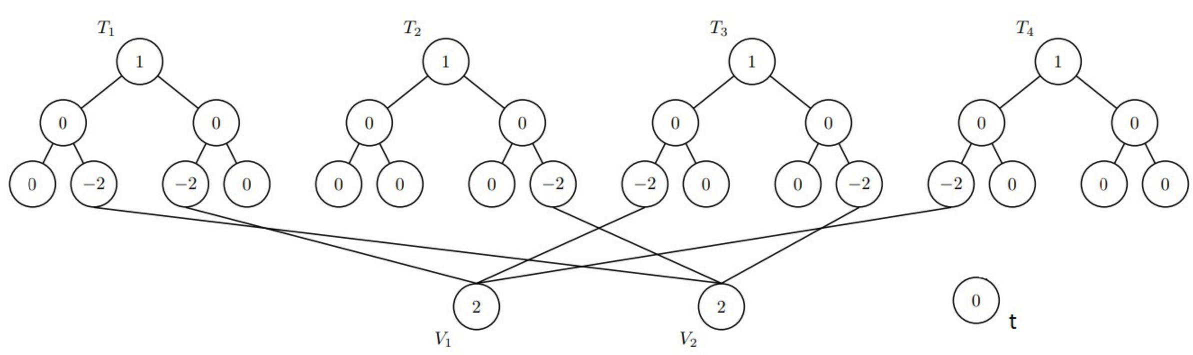
33. Definíció. GUARANTEED POINT PLACEMENT: Adott egy állás egy (0,1,3)-szabállyal játszott bajnokságban (vagyis adottak a hátralévő meccsek és minden csapatnak adott a jelenlegi pontszáma) és adott egy t csapat és egy K pozitív egész szám. Igaz-e, hogy a hátralévő meccsek tetszőleges eredménye esetén a t csapat legalább a K-adik helyen végez?

34. Tétel. *[2] A GUARANTEED POINT PLACEMENT feladat co-NP-teljes.*

35. Megjegyzés. Ahogyan azt az előző fejezetben megállapítottuk, a pontozási szabály egy konstanssal eltolható. A következő bizonyítás folyamán a (0,1,3)-szabályra (-1,0,2)-szabályként lesz érdemes tekintenünk, mert így a döntetlen meccsek nem járnak pontváltozással. Az eddig megszokottakhoz hasonlóan a feladatot egy gráffal ábrázoljuk, a csapatok lesznek a csúcsok, két csúcs között megy él, ha még van hátra meccse a két csapatnak, továbbá a bizonyítás során minden csúcsnak lesz egy értéke, ez az érték a csapat pontszáma mínusz a feladat megadásakor adott t csapat pontszáma. Pontszám-egyenlőség esetén úgy vesszük, hogy a t csapatnak van a legrosszabb gólkülönbsége, így az lesz az utolsó az adott pontszámúak között.

Bizonyítás. Világos, hogy a feladat co-NP-beli, hiszen ha egy állásra nem igaz, hogy a t csapat biztosan eléri legalább a K-adik helyet, akkor van egy olyan lehetséges kimenetel, amikor nem éri el és ez könnyen ellenőrizhető bizonyíték. Így a co-NP-teljességhez elegendő belátni, hogy a komplementere (van olyan befejezés, amelyre a t csapat rosszabb helyezést ér el, mint K) NP-teljes.

A 3-SAT feladatot fogjuk visszavezetni a feladatra. Legyen adott egy konjunktív normálforma, amely minden klózban három literált tartalmaz. Feltehető, hogy minden klózban minden literál legfeljebb egyszer szerepel. Ha $(x_i \vee x_i \vee x_j)$ alakú klózunk van, ahelyett írhatunk $(x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (x_i \vee x_j \vee \neg x_k)$-t, ahol x_k egy új literál, ezzel az átalakítással a normálforma kielégíthetősége nem változik. Azt megengedjük, hogy egy klózban x_i és $\neg x_i$ is szerepeljen. Továbbá az is feltehető, hogy a klózok száma kettőhatvány (ha nem így lenne, írjunk a normálformához új literálokat tartalmazó biztosan igaz klózokat (pl $(x_{-1} \vee \neg x_{-1} \vee x_{-2})$), annyit, hogy így már kettőhatvány legyen a klózok száma. (Mivel a klózok száma legfeljebb a kétszeresére nőtt és literálok száma legfeljebb kettővel nőtt, így a feladat mérete legfeljebb polinomiális nagyságrendben nőtt.)
Készítsük el a normálformához a következő segédgráfot: minden x_j literálhoz készítsünk egy $2|C|$ levelű T_j teljes bináris fát, mindegyik T_j-re a gyökér egyik gyerekénél gyökereztetett részfát nevezzük baloldalinak, a másik gyerekénél gyökereztetettet nevezzük jobboldalinak. A baloldali és a jobboldali részfában is számozzuk meg a leveleket 1-től. Minden klózhoz vegyünk fel egy-egy V_i csúcsot. Ha x_i szerepel a V_j-hez tartozó klózban, akkor V_j-t kössük össze T_i jobboldali részfájának i-edik levelével, ha $\neg x_i$ szerepel a V_j-hez tartozó klózban, akkor V_j-t kössük össze T_i baloldali részfájának i-edik levelével. Ezen kívül vegyünk fel egy t izolált csúcsot.
Az érték minden T_i fa gyökerében legyen 1, minden V_i csúcsban 2, a T_i fák azon leveleiben, amelyekbe megy él valamely V_j-ből legyen -2 minden más csúcsban pedig nulla.

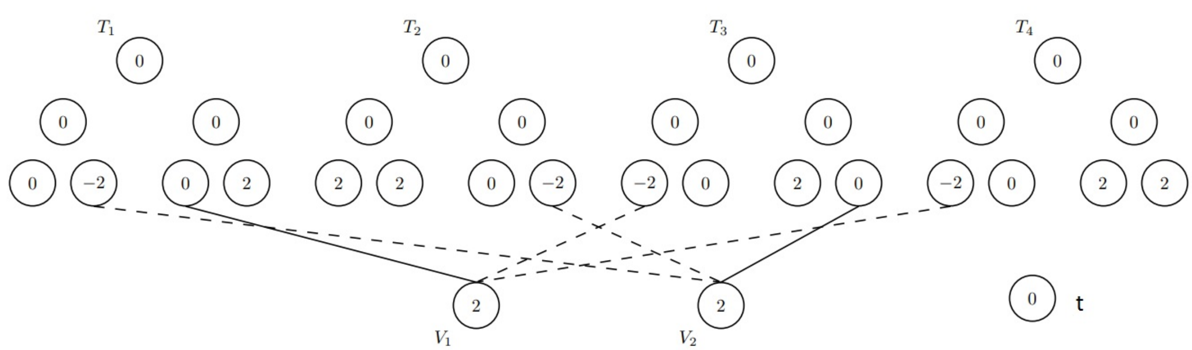


6. ábra. Az $(x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee \neg x_1)$ formulához tartozó segédgráf

36. Állítás. *A konjunktív normálforma pontosan akkor kielégíthető, ha a segédgráfban, az adott értékekkel indulva a t csapat lehet utolsó.*

37. Megjegyzés. Ez elég az NP-teljesség bizonyításához, hiszen a 3-SAT-ot a GUARANTEED POINT PLACEMENT feladat egy speciális esetére vezettük vissza. Mivel a t értéke az előbb megadottak szerint 0, így a t csapat lehet utolsó feltétel azzal ekvivalens, hogy lehet olyan végeredmény, amely esetén minden csapat pontszáma nemnegatív.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a konjunktív normálforma kielégíthető. Ha egy x_i literál a jó kiértékelés során hamisnak lett választva, akkor a baloldali részfájában minden csúcs győzze le a szülőjét (a gyökeret is győzze le a baloldali gyereke). Ekkor a levelek súlya 0 ill. $+2$ lesz, a többi pont súlya pedig 0 (két meccset veszítettek, egyet nyertek). A jobboldali részfán legyen minden meccs döntetlen (így a gyökérben és a jobboldali részfában is minden csúcs súlya 0 lesz, kivéve a leveleket). Ha x_i igaznak lett választva a jó kiértékelésben, akkor pont fordítva: a jobboldali részfában győzze le minden csúcs a szülőjét és a baloldalon legyenek döntetlenek. Minden V_j-t győzzön le az összes olyan szomszédja, ami a kiértékelés során a klózban hamis értéket ad (például: ha x_i igaz és V_j-ben $\neg x_i$ szerepet, akkor x_i i-edik baloldali levele győzze le V_j-t). A többi meccs legyen döntetlen.



7. ábra. Az előző példa $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (I, H, I, I)$ választással

Mivel minden klózban valamelyik literál igaz értéket ad, ezért minden klózhoz tartozó V_j-t legfeljebb két csapat győz le, így minden V_j súlya legalább 0 lesz. Ha x_i igaznak lett választva, akkor a jobboldali levelei csak döntetlent játszhattak, így azokon 0 maradt az érték a baloldalán pedig, ha volt egy nemnulla értékű levél, akkor az össze volt kötve egy V_j csúccsal és mivel a hozzátartozó klózba nem igaz értéket vitt így legyőzte V_j-t és a súlya 0 lett. Ha x_i-t hamisnak választottuk, akkor pont fordítva: a baloldali leveleken maradt 0 az érték, a jobboldali leveleken pedig, ha negatív volt, akkor nyertek egy meccset és megjavult. Így, ha a konjunktív normálforma kielégíthető, akkor valóban kaptunk egy olyan befejezést, amivel a t csapat az utolsó helyen végez.
Most tegyük fel, hogy van egy olyan lejátszás, amellyel a t csapat az utolsó lesz, vagyis, amelyre minden csapat súlya nemnegatív. Mivel minden V_j súlya nemnegatív, így minden V_j-hez van legalább egy meccs, amin nem vesztett. Az ehhez a meccshez tartozó T_i fabeli levélnek csak úgy lehet nem negatív a súlya, ha legyőzte a szülőjét (hiszen eredetileg -2 volt a súlya és a V_j-t nem győzte le). De a szülő másik gyerekének a súlya is csak 0 vagy -1 lehet, így a szülő nem győzhette le a másik gyerekét, így a szülő a saját szülőjét kellett, hogy legyőzze, stb. Ezen az oldalon végül az gyökér is vereséget kellett, hogy szenvedjen. Ebből következik, hogy az egyik fának sem lehet a jobboldalon és a baloldalon is olyan gyereke, amely valamelyik V_j elleni meccsen nem győzött (hiszen ekkor a fa gyökere mindkét gyereke ellen veszített volna, vagyis -1 lenne a súlya). Ha egy V_j-t legyőzött a jobboldali gyereke, válasszuk igaznak, ha legyőzte a baloldali gyereke válasszuk hamisnak, ha pedig egyik sem győzte le, válasszuk meg tetszőlegesen. Ez kielégíti a normálformát, hiszen minden V_j-ből megy él olyan csúcshoz, ami nem győzte le, azaz legyőzte a szülőjét, vagyis olyanhoz, ami vagy egy igaznak választott literálhoz tartozó fa jobboldalán, vagy egy hamisnak választott baloldalán van. Szóval minden V_j klózban vagy egy igaznak választott literál vagy egy hamisnak választott literál tagadása legalább szerepel, így a konjunktív normálformának ez valóban egy jó kielégítése. $\square$

$\blacksquare$

38. Megjegyzés. A fenti bizonyítás kisebb módosításokkal minden $p > 3$ esetén működik $(0, 1, p)$-szabályra.

3.3. Kevés hátralévő meccs esete

Kern és Paulusma eredményei minden esetre kiterjedően megvizsgálják, hogy a SPORT COMPETITION feladat mikor P-beli és mikor NP-beli, viszont értelemszerűen adódik a kérdés, hogy ha általánosan nem is, milyen speciális esetben tudnánk megmondani, hogy egy adott csapat győzhet-e. Kézenfekvő gondolat, hogy ha már csak egy-két meccs van hátra, akkor bizonyára meg tudjuk válaszolni a kérdést polinomiális időben. De mennyi az az egy-két meccs? Az alábbi eredményeket Bernhold, Gülich, Hofmeister és Schmidt [1] a $(0,1,3)$-szabállyal játszott bajnokságokra bizonyították, de a bizonyítás általánosítható más szabályokra is. (Értelemszerűen figyelembe véve, hogy ha egy pontosztási szabálynál az általános kérdés is polinomiális volt, akkor ez az egyszerűbb kérdés is az lesz.)

39. Állítás. *[1] $(0,1,3)$-szabállyal játszott bajnokságban, ha minden csapatnak legfeljebb két mérkőzése van hátra, akkor lineáris időben eldönthető, hogy egy adott csapat nyerhet-e.*

Bizonyítás. Az előző fejezetben használt visszavezetéseket használva a feladat azzal ekvivalens, hogy minden csúcsra adva van egy c_i érték és minden csúcs foka legfeljebb 2, megirányíthatóak-e megfelelően az élek? Mivel minden csúcs foka legfeljebb 2, ezért a gráf körök, utak és esetleg diszjunkt pontok uniója lesz. Egy útra könnyen eldönthető, hogy megirányítható-e jól: elindulunk az egyik végpontjából, ha azon a c_i értéke legalább 3, akkor nyerje meg a meccset, ha 2 vagy 1, játsszon döntetlen, ha 0, akkor veszítse el a meccset. A szomszédján ennek megfelelően frissítsük a c_i értéket. Ha az algoritmus végig megy (és az utolsó csúcsnak is az utolsó frissítés után nemnegatív a pontszáma), akkor találtunk egy jó irányítást, ha valahol megakad az algoritmus (negatívba megy a c_i érték), akkor nincs jó irányítás. A körökre hasonlóan megy: válasszuk ki a kör egy élét ez az él háromféleképpen lehet irányítva. Mindhárom esetben miután az adott élt eldöntöttük, a maradékban egy útra kell megvizsgálnunk, hogy van-e jó irányítás és ez az előbbi látottak szerint megy. ■

Azt láthatjuk, hogy az elképzelésünk helyes volt, kevés hátralévő meccs esetén valóban meg lehet mondani polinomiális időben, hogy nyerhet-e egy adott csapat. Az is belátható, hogy a csapatonként legfeljebb kettő hátralévő meccs bizonyos értelemben éles korlát.

40. Állítás. *[1] Az $SC(0,1,3)$ feladat NP-teljes, ha minden csapatnak legfeljebb 3 mérkőzése van hátra.*

41. Megjegyzés. Az állítás az előző fejezetben leírt 3 speciális esettől eltekintve minden (α, β, γ) pontozási szabályra igaz.

Bizonyítás. A bizonyítás során a 3-SAT feladatot vezetjük vissza a az SC(0,1,3) feladatra úgy, hogy a konstruált segédgráfban minden csúcs foka legfeljebb 3 legyen. A bizonyítás nagyon hasonló az előzőhöz, ugyanúgy (-1,0,2)-szabályként lesz érdemes tekintenünk a (0,1,3)-szabályra, ugyanazt a segédgráfot kell megkonstruálni, az első különbség a pontokra írt súlyokban van:
Az érték minden T_i fa gyökerében és minden V_i csúcsban legyen 1, a T_i fák leveleiben legyen -2, minden más csúcsban pedig nulla.

42. Állítás. *A konjunktív normálforma pontosan akkor kielégíthető, ha a segédgráfban, az adott értékekkel indulva a t csapat lehet első.*

43. Megjegyzés. Ez elég az NP-teljesség bizonyításához, hiszen látható, hogy a konstruált segédgráfban valóban minden csúcs foka legfeljebb három. Mivel a t értéke az előbb megadottak szerint 0, így a t csapat lehet első feltétel azzal ekvivalens, hogy lehet olyan végeredmény, amely esetén minden csapat pontszáma nempozitív.

Bizonyítás. A bizonyítás is hasonló az előzőhöz az x_i literál igaz vagy hamis voltának megfelelően legyen a T_i fa egyik oldalán minden meccs döntetlen, a másik oldalán nyerjen mindig a gyerek. Minden V_j-t legalább egy csapatnak le kell győznie, és egy ilyen él mindenképp a T_j fa igaz felébe kell, hogy menjen, így pontosan akkor van jó eredmény, ha a normálforma kielégíthető. □

■

3.4. Egy lehetséges általánosítás

A fejezet korábbi részeiben mindig az alapfeltételezés része volt, hogy (α, β, γ)-szabállyal játsszák a bajnokságot. Természetesen ez nem meríti ki az összes lehetőséget. Kézenfekvő elindulási mód, ha csak körülnézünk, milyen pontozási szabályokkal játszanak még.

Eddig a lehetséges kimeneteleink az $\{(\alpha, \gamma), (\beta, \beta), (\gamma, \alpha)\}$ voltak. (Az (α, γ) és a (γ, α) kimenetelek most valóban különbözőek, hiszen az egyik esetben a hazai csapat kap α pontot, másik esetben pedig a vendég csapat.)
Természetesen ezen kívül még számtalan pontozási szabály elképzelhető:

Egy bridzs játszma lehetséges kimenetelei az

$S_1 = \{(i, 25), (25, i)|i = 0, \ldots, 5\} \cup \{(i, 30 - i)|i = 6, \ldots, 24\}$.

Egy darts játszma lehetséges kimenetelei az $S_2 = \{(0, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 0)\}$.

A röplabdáé pedig az $S_3 = \{(i, 5 - i)|i = 0, \ldots, 5\}$.

A sor hosszasan folytatható lenne, nem is szólva arról, hogy vannak olyan játékok is, melyekben a hazai és az idegenben játszó csapatra különböző pontozás vonatkozik. Kern és Paulusma [9] a fejezetben tárgyalt eredményekre jutottak.

Legyen $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_l\}$ a versenyen résztvevő csapatok halmaza. Minden $t_i \in T$ csapathoz tartozzon egy s_i aktuális pontszám (az $s = (s_0, s_1, \ldots, s_l) \in \mathbb{R}^l$ vektort az aktuális pontszámvektornak nevezzük). A hátralevő meccseket jelöljük M-mel. Egy $m \in M$ meccset $t_i : t_j$-vel jelölünk, ha t_i a hazai és t_j a vendég csapat. (Megengedjük, hogy két M-beli mérkőzést ugyanaz a két csapat játssza ugyanabban a hazai-vendég felállásban.) A végső pontszámvektor $s' = (s'_0, \ldots, s'_l)$, ha minden $t_i \in T$ csapat végső pontszáma s'_i. Azt mondjuk, hogy a t_0 csapat megnyerte a bajnokságot, ha $s'_i \leq s'_0$ minden $t_i \in T$-re.

44. Definíció. GENERALIZED SPORTS COMPETITION (GSC(S)): Adott egy (T, s, M) hármas a fent leírtak szerint és a meccsek lehetséges kimeneteleinek egy S (rendezett számpárokból álló) halmaza. Kérdés: van-e olyan lehetséges végső pontszám, amellyel a t_0 csapat megnyeri a bajnokságot?

Ahogy a szokásos séma szerint elkezdenénk megoldani a feladatot, már az első lépésnél elakadunk. Eddig mindig abból tudtunk kiindulni, hogy feltehető, hogy a t_0 csapatnak nincs már több hátralévő meccse, mert ha lenne, akkor azokat döntsük el t_0 számára a legkedvezőbben. A GSC feladatnál ezt nem tudjuk ilyen egyszerűen megtenni, mert mi van akkor, ha például t_0 a hazai csapat és az $(5,4)$ és a $(2,0)$ is lehetséges kimenetel? Melyik kedvezőbb ebben az esetben t_0-nak?
Erre nem lehet általános választ mondani, adódhat olyan helyzet, hogy az egyiket érdemes választani, egy másik szituációban pedig a másikat. Azt a feladatot, amikor t_0-nak már nincs hátralévő meccse PSC (PARTIAL SPORTS COMPETITION) feladatnak nevezzük. Azt fogjuk belátni, hogy a GSC feladat polinomiálisan visszavezethető a PSC feladatra. Azaz, ha nem is tudunk mondani egy GSC feladathoz, egyértelműen egy PSC feladatot, ami pont ugyanakkor oldható meg, tudunk mondani néhányat (polinomiálisan sokat), amelyekre ez már fennáll, így elég lesz a PSC feladat bonyolultságával foglalkoznunk.

Legyen egy (T,s,M) hármas, mint a GSC(S) feladatnál és $S=\{(\alpha_i,\beta_i)|1\le i\le n\}$ a lehetséges eredmények halmaza. Tegyük fel, hogy t_0 lejátszotta minden meccsét és $s_0' = s_0$ pontot szerzett. A következőképpen modellezhetjük a PSC feladatot: legyen egy irányított multigráf $G=(V,A)$, minden $i\in V$ csúcsa feleljen meg egy $t_i\neq t_0$ csapatnak és a kapacitása legyen $c_i = s_0 - s_i (= s_0' - s_i)$, amennyi pontot a t_i csapat még legfeljebb szerezhet, úgy, hogy továbbra is t_0 maradjon a győztes. Egy $a=(i,k)\in A$ él reprezentáljon egy $t_i : t_k$ meccset. Jelöljük A_i^j-vel azokat az i-ből kilépő éleket (t_i azon hazai meccseit), melyeken az (α_j,β_j) eredmény született, és B_i^j-vel azokat az i-be belépő éleket (t_i azon idegenbeli meccseit), melyeken az (α_j,β_j) eredmény született. Ekkor a PSC feladat a következő:

45. Definíció. PARTIAL SPORTS COMPETITION (PSC(S)): Adott egy $G=(V,A)$ irányított multigráf, a $c\in\mathbb{R}^V$ csúcskapacitások és a meccsek lehetséges kimeneteleinek S halmaza. Kérdés: tudunk-e olyan eredményeket megadni, hogy minden $i\in V$-re teljesüljön, hogy $\sum_{j=1}^n \alpha_j|A_i^j| + \sum_{j=1}^n \beta_j|B_i^j| \le c_i$?

46. Állítás. *[9] A GSC feladat polinomiálisan visszavezethető a PSC feladatra.*

47. Megjegyzés. Mivel a PSC feladat tartalmilag egy speciális esete a GSC feladatnak, így a fenti állításból az is következik, hogy a két feladat polinomiálisan ekvivalens egymással.

Bizonyítás. A $t_i : t_0$ és $t_0 : t_i$ meccsek lehetséges kimenetelei közül szeretnénk úgy kiválasztani néhányat, hogy csak polinomiálisan sok esetet vizsgáljunk, mégis, ha van megoldása a GSC feladatnak, akkor legyen a kiválasztottak között olyan meccsvégeredmény halmaz (minden $t_i : t_0$ és $t_0 : t_i$ meccsre egy eredmény), amely választása esetén a kapott PSC feladat is megoldható. (A GSC feladatból úgy kapjuk a PSC feladatot, hogy minden $t_0 : t_i$ és $t_i : t_0$ meccsre eldöntjük az eredményt, elhagyjuk az éleket és mindkét végponton ennek megfelelően módosítjuk a kapacitást (pontszámot).) A továbbiakban érdemes külön kezelni t_0 hazai és idegenbeli meccseit.
Szűkítsük a lehetséges kimenetelek halmazát a következőképpen. Ha t_0 hazai meccset játszik, akkor azonos α értékek esetén hagyjuk el a nagyobb β értékű kimenetelt, továbbá, ha van olyan két lehetséges kimenetel, hogy az egyikben a hazai csapat (t_0) kevesebb pontot kap és a pontkülönbsége is kisebb vagy egyenlő, akkor ezt a t_0 számára szigorúan kedvezőtlenebb kimenetelt hagyjuk ki a lehetőségek közül. Így a hazai meccsekre a lehetséges kimenetelek szűkített halmaza: $S_0^h = \{(\alpha_{i_1}, \beta_{i_1}), \ldots, (\alpha_{i_p}, \beta_{i_p})\}$, ahol $\alpha_{i_1} < \cdots < \alpha_{i_p}$ és $\alpha_{i_1} - \beta_{i_1} > \cdots > \alpha_{i_p} - \beta_{i_p}$.
Hasonlóan tudjuk szűkíteni az idegenbeli lehetséges eredmények halmazát is:
$S_0^i = \{(\alpha_{j_1}, \beta_{j_1}), \ldots, (\alpha_{j_q}, \beta_{j_q})\}$, ahol $\beta_{j_1} < \cdots < \beta_{j_q}$ és $\beta_{j_1} - \alpha_{j_1} > \cdots > \beta_{j_q} - \alpha_{j_q}$.

A következő lemma segítségünkre lesz abban, hogy egy felső korlátot mondjunk arra, legfeljebb hányszor használjunk egy $(\alpha_i, \beta_i), i \neq i_p$ eredményt és így polinomiális korlát alá szorítsuk a megvizsgálandó esetek számát.

48. Lemma. *Tegyük fel, hogy $(\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j) \in S_0^h$, ahol $\alpha_i < \alpha_j$. Ekkor, ha van olyan eredmény, amellyel t_0 nyer, akkor van olyan lehetséges kimenetel is, amellyel t_0 nyer és a t_0 csapat kevesebb, mint $\frac{\beta_j - \beta_i}{\alpha_j - \alpha_i}$ csapat ellen játszik (α_i, β_i) eredményű hazai meccset.*

49. Megjegyzés. Látható, hogy S_0^h konstrukciója miatt $\frac{\beta_j - \beta_i}{\alpha_j - \alpha_i} > 0$, ha $\alpha_i < \alpha_j$.

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan eredményt, amikor t_0 nyer. Legyen T' azon csapatok halmaza, akikkel a t_0 csapat (α_i, β_i) eredményű hazai meccset játszott. Ha $|T'| \geq \frac{\beta_j - \beta_i}{\alpha_j - \alpha_i}$, akkor minden $t \in T'$-re egy (α_i, β_i) eredményű $t_0 : t$ meccset változtassunk (α_j, β_j) eredményűre. Ekkor t_0-ra $|T'|(\alpha_j - \alpha_i)$-vel, minden $t \in T'$-re $\beta_j - \beta_i$-vel nő a pontszám, az összes többi csúcson nem változik. Mivel $|T'|(\alpha_j - \alpha_i) \geq \beta_j - \beta_i$, ezért t_0 továbbra is első marad. Ezt a lépést ismételve eljutunk a kívánt állapotig. $\square$

$k_0^h := max\{\frac{\beta_j - \beta_i}{\alpha_j - \alpha_i} | (\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j) \in S_0^h\}$, ezzel (a lemma alapján) egy közös felső korlátot sikerült adnunk arra, hogy egy $(\alpha_i, \beta_i), i \neq i_p$ eredményt legfeljebb hányszor használjunk. Ez a k_0^h szám egy S-től függő konstans. Egy adott t csapatra legyen M_t a $t_0 : t$ meccsek halmaza (ekkor nyilván $|M_t| \leq |M|$).

Ezekről, ha el akarjuk dönteni, melyik milyen eredménnyel záruljanak, akkor azt $\binom{|M_t|+p-1}{|M_t|} \leq \binom{|M|+p-1}{|M|} \leq p|M|^p$ -féleképpen tehetjük meg ($p = |S_0^h|$). Mivel a lemma szerint feltehető, hogy minden $(\alpha_i, \beta_i), i \neq i_p$ kimenetel legfeljebb k_0^h csapattal ellen lett (hazai) végeredmény, ezért legfeljebb $(p-1)k_0^h$ csapat ellen fordulhat elő $(\alpha_{i_p}, \beta_{i_p})$-től eltérő eredmény, az összes többi ellen minden meccs eredménye $(\alpha_{i_p}, \beta_{i_p})$. Így elég $\sum_{i=0}^{(p-1)k_0^h} \binom{|T|}{i} (p|M|^p)^i$ esetet végignéznünk. (Rögzítjük, hogy melyik i darab csapat nem csak $(\alpha_{i_p}, \beta_{i_p})$ eredményű meccseket játszott és azokra megnézzük az összes lehetséges kimenetelt.) Ez $|T|$-ben és $|M|$-ben polinomiális, a p és k_0^h a játék pontozási szabályának megadásával rögzített konstansok. Ez a gondolat az idegenbeli meccsekre is éppen így végigcsinálható, így ez egy polinomiális visszavezetés. $\blacksquare$

Ahogy az (α, β, γ)-szabállyal játszott bajnokság esetében is megegyszerűsítette az esetek kezelését egyfajta egyszerűsítés, normalizálás, úgy a végkimenetelek egy S halmazát is lehet egyszerűsíteni úgy, hogy a végeredmény ezzel ne változzon, de egy átláthatóbb struktúrával kelljen csak foglalkoznunk.

50. Lemma. *[9] Legyen $S = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$. Ekkor létezik a végkimeneteleknek egy olyan S' halmaza, melyre $S' = \{(0, \beta'_1), (1, \beta'_2), \ldots, (\alpha'_{k-1}, \beta'_{k-1}), (\alpha'_k, 0)\}$ úgy, hogy $k \leq n$, $1 < \alpha'_3 < \alpha'_4 < \cdots < \alpha'_k$ és $\beta'_1 > \beta'_2 > \cdots > \beta'_{k-1} \geq 1$. Valamint minden (G, c) PSC(S) feladathoz létezik egy $(G'c')$ PSC(S') feladat, amelyre (G, c)-nek pontosan akkor van megoldása, ha (G', c')-nek van.*

51. Megjegyzés. Az S-ből a bizonyítás során használt algoritmussal nyert S' halmazt S normalizáltjának nevezzük.

Bizonyítás. Ha létezik $(\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j) \in S$, amelyre $(\alpha_i \leq \alpha_j)$ és $(\beta_i \leq \beta_j)$, akkor (α_j, β_j)-t elhagyhatjuk (hiszen, ha valahol egy (α_j, β_j) eredmény helyett (α_i, β_i) eredmény születik, azzal semelyik csapatnak nem nő a pontszáma). Így egy olyan $\overline{S} = \{(\overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}), (\overline{\alpha_2}, \overline{\beta_2}), \ldots, (\overline{\alpha_k}, \overline{\beta_k})\}$ halmazt kapunk, melyre $k \leq n$ és $\overline{\alpha_1} < \overline{\alpha_2} < \cdots < \overline{\alpha_k}$ és $\overline{\beta_1} > \overline{\beta_2} > \cdots > \overline{\beta_k}$.

Legyen $c_i^* := c_i - \overline{\alpha_1}\delta(i) - \overline{\beta_k}\rho(i)$ (ahol $\delta(i)$ és $\rho(i)$ az eddigieknek megfelelően a ki- és befok). Ekkor világos, hogy a (G, c) PSC(S) feladat ekvivalens a (G, c^*) PSC(S*) $S^*= \{(0, \overline{\beta_1} - \overline{\beta_k}), (\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1}, \overline{\beta_2} - \overline{\beta_k}), \ldots, (\overline{\alpha_k} - \overline{\alpha_1}, 0)\}$ feladattal.

Feltehető, hogy $\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1} \leq \overline{\beta_{k-1}} - \overline{\beta_k}$, ha nem így lenne, akkor fordítsuk meg az összes élt és fordítsuk meg a párokat: (α_i, β_i) helyett vegyünk (β_i, α_i)-t. Minden $i \in V$-re osszuk le c_i-t $(\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1})$-gyel és minden $1 \leq j \leq k$-ra osszuk el $(\overline{\alpha_j} - \overline{\alpha_1})$-et és $(\overline{\beta_j} - \overline{\beta_k})$-t $(\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1})$-gyel. Így egy ekvivalens (G', c') PSC(S') feladatot kapunk, ahol $S' = \{(0, \beta'_1), (1, \beta'_2), \ldots, (\alpha'_{k-1}, \beta'_{k-1}), (\alpha'_k, 0)\}$, továbbá $k \leq n$, $1 < \alpha'_3 < \alpha'_4 < \cdots < \alpha'_k$ és $\beta'_1 > \beta'_2 > \cdots > \beta'_{k-1} \geq 1$. ■

Minden készen áll arra, hogy kimondjuk a témakör főtételét.

52. Tétel. *[9] A PSC(S) feladat P-ben van, ha S normalizáltja $\{(i, n-i)|0 \leq i \leq n\}$ alakú valamely $n \in \mathbb{N}$-re, minden más esetben a PSC(S) feladat NP-teljes.*

53. Következmény. *A GSC(S) feladat P-ben van, ha S normalizáltja valamely $n \in \mathbb{N}$-re $\{(i, n-i)|0 \leq i \leq n\}$ alakú, minden más esetben a GSC(S) feladat NP-teljes.*

Bizonyítás vázlat. Az $|S| = 1$ eset triviális, így feltehetjük, hogy $|S| \geq 2$, S normalizált. A továbbiakban esetszétválasztást alkalmazunk.

1. Segédállítás. Ha $\alpha_i > \alpha_{i-1} + 1$ valamely $3 \leq i \leq n$ esetén, akkor PSC(S) NP-teljes.

A feladatot a 3-DIMENSIONAL MATCHING feladatra fogjuk visszavezetni. Ugyanazt a segédgráfot kell elkészíteni, mint a 27. Tétel (4) pontjában. Azaz az X, Y, Z halmazok minden eleméhez tartozzon egy csúcs, az $(x, r), (y, r)$ és (z, r) párokhoz tartozzon egy csúcs, ha $x \in r, y \in r$ illetve $z \in r$ és az R halmaz minden eleméhez is tartozzon egy csúcs. Egy $a \in X \cup Y \cup Z$ elemnek megfelelő csúcsból az (a, r) csúcsokba menjen él (ahol $r \in R$ és $a \in r$) az $r \in R$ csúcsokból pedig az szintén az (a, r) csúcsokba menjen él (ahol $a \in X \cup Y \cup Z$ és $a \in r$). Minden élt irányítsunk meg: X-ből $\overline{X}$ fele, Y-ból $\overline{Y}$ fele, W-ből $\overline{W}$ fele és R-ből $\overline{X}, \overline{Y}$, illetve $\overline{W}$ fele. A kapacitások legyenek $c = \alpha_n(\delta - 1) + \alpha_{n-1}$ W-n, $c = max\{\beta_{i-1}, \beta_{n-1} + \beta_i\}$ $\overline{W}$-n, $c = max\{\alpha_i, 2 + \alpha_{i-1}\}$ R-en, $c = \beta_1 + \beta_2$ $\overline{X} \cup \overline{Y}$-on és $c = 1$ $X \cup Y$-on. (A maximumot nem minden i-re kell nézni, hanem rögzítsünk egy a feltételnek megfelelő i számot és így a két szám maximumát kell nézni).

Pontosan akkor lehet a meccseknek olyan végeredményt megadni, hogy teljesüljön a kívánt feltétel, ha R-ben van matching. (Ezt most precízen nem bizonyítjuk, csak a gondolat menet fő ívéről ejtünk egy-két szót.) Világos, hogy az előírt kapacitásokkal könnyen lehet megfelelő végeredményeket mondani - ehhez az állítás feltételére sincs szükség. A bizonyítás bonyolultabb fele, amikor az eredményekhez kell matchinget készítenünk. Azt láthatjuk, hogy minden W-beli csúcsból legalább egy élen legfeljebb α_{n-1} pontot kap a csúcs, így az él másik végpontja legalább β_{n-1} pontot kap, így a másik meccsén (másik bejövő élen) legfeljebb β_i pontot kap, így a másik bejövő élének másik végpontján lévő R-beli csúcs legalább α_i pontot kap. Így ez az R-beli csúcs a másik két meccsen már csak 0 pontot kaphat (itt használjuk ki a feladat feltételét, hogy $\alpha_i > \alpha_{i-1} + 1$) viszont ez már meghatározza az X és $\overline{X}$ valamint Y és $\overline{Y}$ közötti eredményeket. Összességében azt láthatjuk, hogy az ilyen $r \in R$-ek fogják a megfelelő matchinget alkotni.

2. Segédállítás. Ha $\beta_{i-1} > \beta_i + \beta n - 1$ valamely $2 \leq i \leq n-1$ esetén, akkor PSC(S) NP-teljes.

A bizonyítása ugyanúgy megy, mint az 1. Segédállításnak.

Innentől feltehető, hogy $\alpha_i \leq \alpha_{i_1} + 1$ és $\beta_{i-1} \geq \beta_i + \beta n - 1$.

3. Segédállítás. Ha $\alpha_i < \alpha_{i_1} + 1$ és $\beta_{i-2} > \beta_i + \beta n - 1$ valamely $3 \leq i \leq n$ esetén, akkor PSC(S) NP-teljes.

A feladatot ismét a 3-DIMENSIONAL MATCHING feladatra fogjuk visszavezetni, az irányított gráf legyen ugyanaz, mint az 1. Segédállítás bizonyításában. A kapacitások pedig: $c = 1$ W-n, $c = \beta_1 + \beta_2$ $\overline{W}$-n, $c = max\{2\alpha_i, 2\alpha_{i-1} + 1\}$ R-en, $c = \beta_i + \beta_{n-1}$ $\overline{X} \cup \overline{Y}$-on és $c = \alpha_n(\delta - 1) + \alpha_{n-1}$ $X \cup Y$-on.
Pontosan akkor van a (G, c) párra megoldás, ha R-ben van van 3-dimenziós matching.

4. Segédállítás. Ha $\beta_{i-1} < \beta_i + \beta_{n-1}$ és $\alpha_{i+1} > \alpha_{i_1} + 1$ valamely $2 \leq i \leq n-1$ esetén, akkor PSC(S) NP-teljes.

A bizonyítása ugyanúgy megy, mint az 3. Segédállításnak.

5. Segédállítás. Ha $\alpha_i < \alpha_{i_1} + 1$ valamely $3 \leq i \leq n$ esetén, akkor PSC(S) NP-teljes.

$k := min\{i | \alpha_i < \alpha_{i_1} + 1\}$. Mivel $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$, ezért $k \geq 3$. Ha $\beta_{k-2} > \beta_k + \beta_{n-1}$, akkor a 3. Segédállítás miatt készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\beta_{k-2} \geq \beta_k + \beta_{n-1}$, ekkor $\beta_k < \beta_{k-1}$ miatt $\beta_{k-2} < \beta_{k-1} + \beta_{n-1}$. Mivel $\alpha_k > \alpha_{k-1} = \alpha_{k-2} + 1$, ezért teljesül a 4. Segédállítás feltétele és így készen vagyunk.

6. Segédállítás. Ha $\beta_{i-1} < \beta_i + \beta_{n-1}$ valamely $2 \leq i \leq n-1$ esetén, akkor PSC(S) NP-teljes.

Tegyük fel, hogy $\beta_{i-1} < \beta_i + \beta_{n-1}$. Azt már láttuk, hogy ha valamely $2 \leq j \leq n$-re, ha $\alpha_j > \alpha_{j-1} + 1$, akkor NP-teljes a feladat (1. Segédállítás) és ha $\alpha_j < \alpha_{j-1} + 1$, akkor is (5. Segédállítás). Feltehető tehát, hogy $\alpha_j = \alpha_{j-1} + 1$ minden $2 \leq j \leq n$-re. Ekkor viszont $\alpha_{j+1} = \alpha_j + 1 > \alpha_{j-1} + 1$ így a 4. Segédtétel szerint készen vagyunk.

Beláttuk tehát, hogy PSC(S) NP-teljes, kivéve, ha $S = \{(i, (n-i)\beta) | 0 \leq i \leq n\}$ alakú valamely $\beta \geq 1$ számra.

7. Segédállítás. Ha $\beta > 1$ akkor PSC(S) NP-teljes.

A feladatot ismét a 3-DIMENSIONAL MATCHING feladatra fogjuk visszavezetni, a gráf irányítatlanul legyen ugyanaz, mint az 1. és 3. Segédállítások bizonyításában, de az irányítások a következőképpen mutassanak: $\overline{W}$-ból W-be, illetve R-be, R-ből $\overline{X}$-ba és $\overline{Y}$-ba és X-ből $\overline{X}$-ba valamint Y-ból $\overline{Y}$-ba. A kapacitások pedig a következőképpen legyenek: $c = n\beta(\delta-1)+(n-1)\beta$ W-n, $c = n$ $\overline{W}$-n, $c = max\{2, \beta\}$ R-en, $c = n\beta+(n-1)\beta$ $\overline{X} \cup \overline{Y}$-on és $c = 1$ $X \cup Y$-on.
Itt is pontosan akkor van a (G, c) párra megoldás, ha R-ben van van 3-dimenziós matching.
8. Segédállítás. Ha $\beta = 1$, akkor PSC P-ben van.

Egyszerűen felírható folyam-feladatként is, de talán még egyszerűbb Hakimi irányítási tételeivel. Mivel $\beta = 1$-re a pontozási szabály szimmetrikus (minden számpárnak a fordítottja is szerepel), ezért nem számít melyik csapat a vendég és melyik a hazai. Hagyjuk el a $G = (V, A)$ gráf éleiről az irányítást és minden él helyett húzzunk be n darab párhuzamos élt. Ezek után pontosan akkor lesz jó végeredmény, ha van olyan megirányítása a gráfnak, amelyre minden $i \in V$ csúcs befoka legfeljebb c_i. Ez pedig Hakimi irányítási tételei (2. és 3. Állítás a 25. Állítás bizonyítása során tárgyalt általánosítása) szerint polinomiális időben eldönthető. $\square$

4. Elérhető helyezés gólkülönbséggel

A korábbi fejezetekben nem igazán foglalkoztunk gólkülönbségekkel, mindig feltételeztük, hogy a gólkülönbségek úgy alakulnak, ahogy azok nekünk a legkedvezőbbek. Az a kérdés nem kifejezetten izgalmas, hogy hátralévő meccseket adjunk meg gólkülönbséggel együtt és nyerhet-e még így egy adott csapat, hiszen ez a probléma már gólkülönbségek nélkül is NP-teljes volt. Így hát, tekintsük azt a feladatot, hogy a meccsek eredményei adottak, csak a gólkülönbségekről dönthetünk.

54. Definíció. POSSIBLE GOAL DIFFERENCE PLACEMENT (PGDP): Adott egy (0,1,3) szabállyal lejátszott bajnokság a lehetséges meccsek egy részén a meccsek gólkülönbsége, egy kijelölt t csapat és egy K pozitív egész szám. Kérdés: lehetséges-e úgy megadni az ismeretlen gólkülönbségeket, hogy a t csapat legalább a K-adik helyen végezzen?

55. Megjegyzés. Feltehető, hogy mindenkinek egyforma sok pontja van (és így csak a gólkülönbség számít), hiszen, ha L csapatnak több pontja van t-nél, akkor t legfeljebb az $(L+1)$-edik lehet és ez csak úgy fordulhat elő, ha az azonos pontszámúak között legalább a $(K-L)$-edik helyen végez. Továbbá feltehető, hogy t minden meccsének tudjuk a gólkülönbségét, mert ha van hátra olyan meccse t-nek, amit megnyert és nem tudjuk a végeredményét, akkor érdektelen a kérdés, hiszen döntsünk el utolsónak egy ilyen meccset és nyerje meg a t csapat annyira sok ponttal, hogy neki legyen a legjobb gólkülönbsége. (Azokat a meccseket, amelyeket elvesztett, de még nem tudjuk a gólkülönbséget megválaszthatjuk 1-0-nak.)

56. Definíció. LEFOGÓ PONTHALMAZ: Adott egy T halmaz és T-nek $S_1, \ldots, S_n$ nemüres részhalmazai és egy k egész szám. Kérdés: létezik-e $S_0 \subseteq T$, $|S_0| \leq k$, amelyre $S_0 \cap S_i \neq \emptyset$ $(\forall i = 1 \ldots n)$?

57. Megjegyzés. [5] A LEFOGÓ PONTHALMAZ feladat NP-teljes.

58. Állítás. *[2] A PGDP feladat NP-teljes.*

Bizonyítás. Az, hogy a feladat NP-ben van, világos. A LEFOGÓ PONTHALMAZ feladatot fogjuk visszavezetni a PGDP feladatra. Használjuk a definiálás során használt jelöléseket, valamint legyen $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$. A bizonyítás során a (0,1,3) szabályra ismét a (-1,0,2) szabályként gondolunk. Készítsük el az alábbi segédgráfot: legyen $|T| + |S|+1$ pontja: $t_1, \ldots, t_{|T|}, s_1, \ldots, s_n, t$. t legyen izolált csúcs és a gólkülönbsége 0. t_i győzze le s_j-t pontosan akkor, ha $t_i \in S_j$. Legyen minden t_i csúcson a gólkülönbség $-d(t_i) - 1$, minden s_i csúcson pedig $\sum_{t_i}(d(t_i) + 1)$ (ahol $d(t_i)$ a segédgráfban t_i foka).

Pontosan akkor létezik megfelelő, legfeljebb k-méretű S_0, ha t legalább a $(k + 1)$-edik helyen végzett.

Egyrészt, ha van megfelelő S_0 halmaz, akkor válasszuk meg először az összes meccset 1-0-nak. Minden s_j csapatnak lesz egy S_0-beli t_i szomszédja. Minden ilyen s_jt_i meccs gólkülönbségét növeljük meg annyira, hogy s_j gólkülönbsége negatív legyen. Így minden s_j csapat gólkülönbsége negatív lesz, minden $T \setminus S_0$-beli csapat gólkülönbsége -1 lesz, így legfeljebb az S_0-beli k darab csapatnak lehet pozitív a gólkülönbsége, így t legalább a $(k + 1)$-edik lesz.

Másrészt, ha van olyan gólkülönbség, amellyel a t csapat legfeljebb a $(k + 1)$-edik, akkor legfeljebb k csapatnak pozitív a gólkülönbsége. Ha egy S-hez tartozó s_j csúcson pozitív a gólkülönbség, akkor azt legyőzte legalább egy t_i csapat. (Mert S-ben csak nemüres részhalmazok vannak.) Egy ilyen s_jt_i meccsen növeljük meg a gólkülönbséget úgy, hogy s_j-nek már negatív legyen a gólkülönbsége. Egy ilyen lépéssel a a pozitív gólkülönbségű csapatok száma nem nőhet, így elérhető, hogy minden pozitív gólkülönbségű csapat T-hez tartozzon. Ekkor ennek a legfeljebb k csúcsnak megfelelő T-beli elemek jó S_0 halmazt adnak, hiszen kiinduláskor minden S-beli részhalmazhoz tartozó s_j csúcsnak $\sum_{t_i}(d(t_i)+1)$ volt a gólkülönbsége, így mire s_j-nek negatív lett a gólkülönbsége legalább egy t_i szomszédjának pozitív lett. Így minden s_j-nek van pozitív pontszámú szomszédja, tehát az így választott (legfeljebb k méretű) S_0 részhalmaz tényleg minden S_i-t elmetsz.

■

5. Pontszámvektor megvalósíthatóságának vizsgálata

Eddig a pontig mindig feltettük, hogy van egy kezdeti állapotunk, egy pillanatnyi állása a bajnokságnak, azzal viszont nem foglalkoztunk, hogy ez a pillanatnyi állás valóban létezhet-e. Ez nem is egyszerű kérdés, mint láttuk, érdekes módon arról, hogy egy adott helyzetből egy adott csapat nyerhet-e még, már 1999-ben tudták, hogy NP-teljes, míg erről a feladatról csak 10 évvel később, 2009-ben sikerült bebizonyítani.

59. Definíció. SCORE VECTOR: Adott egy $G = (V, E)$ gráf egy (0,1,p) pontozási pontozási szabállyal és egy $P : V \to \mathbb{Z}_0^+$ előírás. Megirányíthatók-e a gráf élei úgy, hogy minden v csúcsra $P(v) = p \cdot \rho(v) + \theta(v)$ teljesüljön?

60. Megjegyzés. Ez annak a kérdésnek felel meg, hogy adottak csapatok és közöttük lejátszott meccsek, illetve minden csapathoz adott egy pontszám, a kérdés az, hogy el tudjuk-e dönteni a megadott meccsek végeredményét úgy, hogy minden csapat aktuális pontszáma az előírt legyen.

61. Állítás. *[12] A SCORE VECTOR feladat $1 < p \neq 2$ esetén NP-teljes.*

Bizonyítás. A feladatot a 3-SAT feladatot fogjuk visszavezetni a SCORE VECTOR feladatra (a PARTIAL ORIENTATION feladat bizonyításához hasonlóan). Egy konjunktív normálformához vegyük ugyanazt a gráfot, amit a PARTIAL ORIENTATION feladat bizonyításában vettünk, csak most fokszám előírás helyett pontszámokat írjunk elő a csúcsokon: minden v csúcsra a pontszám-előírás legyen $p \cdot \rho(v) + \theta(v)$. (Ahol a ρ és a θ értékek a PARTIAL ORIENTATION feladat bizonyításában adottak.)
Megfigyelhetjük, hogy ha egy csúcs foka legfeljebb 3, akkor a csúcson megadott pontszám egyértelműen meghatározza azt is, hogy mennyi legyen a csúcs befoka, kifoka és irányítatlan foka, ha fennáll az állításban szereplő feltétel, hogy $1 < p \neq 2$ (könnyen ellenőrizhető, hogy adott fokszám mellett nincs olyan pontszám, ami kétféleképpen is előállhat). Ezzel a gráfunk majdnem minden csúcsán a pontszám-előírásból következik a fokszám-előírás, már csak a v_{C_i} csúcsokat kell megvizsgálnunk (csak azoknak nagyobb a foka 3-nál). Mivel tetszőleges v_{C_i} csúcsra teljesül, hogy egyik szomszédja sem játszott döntetlent (a szomszédokon már tudjuk az előírást), így a v_{C_i} csúcsra szükségszerű a $\rho(v_{C_i}) = 3, \theta(v_{C_i}) = 2$ előírásokat használnunk. Vagyis, ha el tudjuk dönteni ezen a gráfon erre a pontszám-előírásra, hogy van-e olyan irányítás, amely teljesíti ezt az előírást,

akkor eltudjuk dönteni a hozzá tartozó ki-, be- és irányítatlan fok előírásra is és így a hozzá tartozó konjunktív normálformáról is meg tudjuk mondani, hogy kielégíthető-e. Ezzel sikerült visszavezetnünk a SCORE VECTOR feladatot a 3-SAT-ra, így a feladat valóban NP-teljes. ■

62. Megjegyzés. Mivel a bizonyításban használt gráf (az 10. Megjegyzésben megállapítottak szerint) páros gráf, így a SCORE VECTOR feladat már páros gráfokra is NP-teljes.

63. Megjegyzés. $p = 2$-re a feladat P-ben van: Vegyük a G gráfot és duplázzuk meg minden élét. Ezek után az a kérdés, hogy van-e olyan irányítatlan éleket nem tartalmazó irányítása, amelyre minden csúcs befoka $P(v)$. (A duplázott gráfban két egy irányba mutató élnek az eredeti gráfban egy ugyanarra mutató irányított él fog megfelelni, két ellentétes irányúnak pedig egy irányítatlan él.) Ez a kérdés pedig megválaszolható polinomiális időben (a 3. Állítás multigráfokra is igaz, a bizonyítás lényegileg ugyanúgy megy).

6. Nyitott kérdések

1. Egy n pontú teljes gráfban van-e olyan részgráf, ami teljesít egy adott ki-, be-, és irányítatlan fok előírást?

2. A második fejezetben sok kérdést megvizsgáltunk részgráfok irányítására, ezek nagy része nyitott, ha fokok helyett pontszámok adottak.

3. Az előző pontban felvetett kérdések közül kiemelném azt a talán legspeciálisabb kérdést, hogy egy $p_1, \ldots, p_n$ számsorozat mikor lehet egy $(0, 1, p)$-szabállyal játszott bajnokság végeredménye?

4. A 3. fejezet végén megállapítottuk, hogy ha azt eldönteni NP-teljes, hogy egy csapat még nyerhet-e, akkor annak az eldöntse, hogy lehet-e még K-adik szintén NP-teljes. Kérdés azonban, hogy a $(0, 1, 1)$ és $(0, 1, 2)$-szabályokra, amikor a győzelem eldöntése P-ben van, akkor a K-adik hely elérése is P-beli feladat?

5. Igaz-e, hogy a 3. fejezetben vizsgált GUARANTEED POINT PLACEMENT feladat co-NP-teljes $1 < p < 3$ esetén $(0, 1, p)$-szabályra?

6. Milyen p paraméterek esetén lesz NP-teljes a POSSIBLE GOAL DIFFERENCE PLACEMENT feladat $(0, 1, p)$-szabályra?

A fenti kérdések nem egyes cikkekben felsorolt megoldatlan problémák, hanem olyan kérdések, amelyek a szakdolgozat írása közben felmerültek bennem és nem sikerül megoldanom őket, illetve nem találtam sehol olyan utalást, hogy lenne rájuk ismert megoldás. Ettől függetlenül elképzelhető, hogy van köztük olyan kérdés, amelyet már vizsgáltak és tudjuk rá a választ.

Hivatkozások

[1] T. Bernholt, A. Gülich, T. Hofmeister, and N. Schmitt. Football elimination is hard to decide under the 3-point-rule. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 410–418. Springer, 1999.

[2] J. Christensen, A. N. Knudsen, and K. S. Larsen. Soccer is harder than football. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 26(4):477–486, 2015.

[3] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver. Combinatorical optimalization, 1998.

[4] C. Dürr, F. Guinez, and M. Matamala. Reconstructing 3-colored grids from horizontal and vertical projections is np-hard. In *ESA*, volume 5757, pages 776–787. Springer, 2009.

[5] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.

[6] S. L. Hakimi. On the degrees of the vertices of a directed graph. *Journal of the Franklin Institute*, 279(4):290–308, 1965.

[7] H. B. Hunt III, M. V. Marathe, V. Radhakrishnan, and R. E. Stearns. The complexity of planar counting problems. *SIAM Journal on Computing*, 27(4):1142–1167, 1998.

[8] W. Kern and D. Paulusma. The new fifa rules are hard: complexity aspects of sports competitions. *Discrete Applied Mathematics*, 108(3):317–323, 2001.

[9] W. Kern and D. Paulusma. The computational complexity of the elimination problem in generalized sports competitions. *Discrete Optimization*, 1(2):205–214, 2004.

[10] H. G. Landau. On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for a score structure. *Bulletin of Mathematical Biology*, 15(2):143–148, 1953.

[11] O. Ore. Studies on directed graphs, i. *Annals of Mathematics*, pages 383–406, 1956.

[12] D. Pálvölgyi. Deciding soccer scores and partial orientations of graphs. *Acta Univ. Sapientiae, Math*, 1(1):35–42, 2009.