Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Gráfok barátságos partíciói

Paulovics Zoltán

Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

- szakdolgozat -

Témavezető:

Bérczi Kristóf

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Nagy hálával tartozom témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak, aki hétről-hétre órákat szánt a konzultációra, végighallgatta majd türelmesen válaszolt a kérdéseimre. Bevezetett a kutatás rejtelmeibe, általa megismerkedhettem ezen látásmód szépségeivel. Összességében a gráfelmélet és így az egész matematika egy számomra eddig még ismeretlen arcának vonásait pillanthattam meg. Rengeteg ötlet, technika és ezeket inspiráló jókedv jellemezte a vele töltött szerda délelőttöket. Úgy vélem, hogy általa nem csak jobb matematikus, hanem jobb ember is lettem.

Ez a rövidke írás közel egy év munkája, mely során én rengeteget változtam. Jó, hogy a matematika „örök”.

„Omnia ad maiorem Dei gloriam!”

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Technikai megjegyzések

A gráfokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, definíciókat ismertnek tekintjük, de azért felsorolunk néhány könyvet, melyekből a szükséges ismeretek kikereshetők. [1] nagyon jó bevezetést ad a gráfelméletbe és annak néhány alkalmazásába, míg [53]-ban új témakörökkel és módszerekkel ismerkedhet meg az érdeklődő. [2] remek kézikönyv, mely bő áttekintést ad a legfontosabb eredményekről, és végül [24] a kombinatorikus optimalizálás témaköreit, egymáshoz fűződő viszonyát elemzi, mely bizonyos részeit mi is érinteni fogjuk.

A szakdolgozat célja összegyűjteni és bemutatni a barátságos partíciókkal kapcsolatos eredményeket. A tételek felsorolása mellett igyekszünk minél több bizonyítást közölni, hogy ezáltal az Olvasó a már felfedezett technikákkal is megismerkedhessen, de néhol a bonyolultságuk vagy a hosszúságuk miatt sajnos el kellett hagynunk a levezetéseket. Viszonylag nagy terjedelemben foglalkozunk a téma különböző változataival, illetve lehetséges felhasználásaival, hozzá kapcsolódó más gráfelméleti fogalmakkal. Ez és az 50-nél is több hivatkozás teremthet lehetőséget a további kutatómunkára.

A barátságos partíció fogalmának bevezetése

Hétköznapjaink folyamán gyakran szembesülünk azzal, hogy egy csoportot két részre szeretnénk osztani a csoport tagjai között fennálló baráti viszonyok figyelembevételével, mégpedig olyan módon, hogy senki ne sajnálkozzon amiatt, hogy a másik csoportban több barátja van. Ezt hivatott szemléltetni a következő példa. Egy n matematikusnak rendezett konferencián az ebédlőben úgy szeretnék leültetni a résztvevőket, hogy mindenki ahhoz az asztalhoz kerüljön, ahol több emberrel van közös publikációja. Be fogjuk bizonyítani, hogy a feladat NP-teljes, így joggal mosolyogják meg a matematikusok a túlbuzgó szervezőt, aki nem tudja őket polinom időben leültetni.

Matematikai szempontból tehát akkor mondjuk egy gráf partíciójára, hogy barátságos, ha a gráf bármely csúcsára teljesül, hogy a saját halmazában legalább annyi szomszédja van, mint a másikban.

A dolgozat felépítése

Az 1. fejezetben felépítjük a barátságosság fogalmát a gráfokban, azaz definiáljuk először csúcsra, majd halmazra, végül pedig egy egész gráfra, hogy mikor nevezzük őket barátságosnak. Itt közöljük [12] alapján a rengeteg különféle változat definícióját. Ezek közül jó néhány felbukkan még későbbi fejezetekben, és lesznek, amelyekkel részletesebben fogunk foglalkozni.

Ezek után összegyűjtjük a 2. fejezetben a fent definiált problémák bonyolutságát, és közöljük a Barátságos partíció NP-teljességének a bizonyítását [9]. A legtöbb változat általánosságban NPC-beli, így a későbbi fejezetekben a speciális gráfosztályra született eredményeket tekintjük át.

A 3. fejezetben először elégséges feltételeket nézünk meg, majd megmutatjuk, hogy sem a barátságos partíció létezésének, sem a nemlétezésének nincs tiltott részgráf karakterizációja [9].

A 4. fejezet az irodalomban leggazdagabb reguláris gráfok particionálhatóságáról szól. Még csak $d = 1, 2, 3, 4, 6$-ra ismert, hogy véges sok kivételtől eltekintve mindig létezik barátságos partíciójuk a d-reguláris gráfoknak. [3]-ban a sejtés az, hogy minden k esetén minden $2k$-reguláris gráf barátságos, feltéve, hogy több, mint $4k$ csúcsa van. Ezt a sejtést [39]-ben aszimptotikusan majdnem minden $2k$-reguláris gráfra belátták.

Az operációkutatás világában nem ritka, hogy kiderül egy probléma NP-teljessége. Ilyenkor jó közelítést, approximációt próbálunk adni. Ha egy gráfban olyan barátságos partíciót találunk, hogy a két partíció elemszáma azonos, akkor ezt barátságos bipartíciónak nevezzük. Szükség lehet arra, hogy a kiegyensúlyozottság megmaradjon még olyan áron is, hogy néhány csúcs „elromlik”, azaz már nem lesz barátságos. Ha sikerül ezen csúcsok számát minimalizálni, azaz maximalizálni a barátságos csúcsok számát, akkor egy maximálisan barátságos bipartíciót kapunk. A Maximálisan barátságos bipartíció problémáról [7]-ben megmutatják, hogy nem létezik polinom idejű approximációs sémája, kivéve, ha $P = NP$, majd ugyanitt adnak rá egy 3-approximáló algoritmust. A legfrissebb eredmény 2011-ből, [48]-ból származik, ahol bebizonyítják, hogy 2-approximálható. Az 5. fejezetben ezeket az eredményeket tekintjük át részletesebben.

Jogosan merül fel, hogy matematikai szempontból önkényesen követeltük meg egy csúcs barátságosságánál, hogy szomszédainak legalább a fele tartozzon vele egy csoportba. Ezt általánosítják a 6. fejezetben az (a, b)-partíciók, ahol minden csúcsra különböző fokszámkritérium írható elő. Stiebitz 1996-os cikke óta több publikációban foglalkoztak már különböző elégséges feltételekkel. Az (a, b)-partíciók aktualitását jelzi, hogy 2018-ban is jelent meg eredmény a témában. Itt csak a tételek felsorolására szorítkozunk, mivel ezen technikák lényegesen komplexebbek az eddigi fejezetek módszereinél.

A 7. fejezetben felsoroljuk néhány lehetséges felhasználását a barátságos partícióknak, ugyanis a biológiai és szociális hálózatokon kívül mérnöki alkalmazásai is ismertek. Ezután részletesebben ismertetjük a hozzá szorosan kapcsolódó szövetségek (alliances) és független vágások (matching cutset) problémakörét.

Végül a 8. fejezetben felteszünk néhány kérdést, melyekre még nem érkeztek válaszok. A nyitott problémák remélhetőleg gondolkodásra és kutatásra ösztönzik az Olvasót.

1. fejezet

Definíciók

Ebben a fejezetben bevezetjük a fontosabb jelöléseket és a barátságos gráfok definícióját. Először a csúcsokra, majd halmazokra, partíciókra, végül pedig gráfokra is megmondjuk, hogy mikor nevezzük őket barátságosnak.

Mivel rengeteg különböző változata ismert ezen partícióknak, ezért itt egybegyűjtve felsoroljuk őket, de a későbbiekben néhánnyal részletesebben is foglalkozunk majd.

1.1. Terminológia és alapfogalmak

Egy gráfon végig egyszerű, véges, összefüggő gráfot értünk. Innentől ezeket a jellemzőket már fel sem tüntetjük, csak akkor, ha hangsúlyozni kívánjuk a gráf ezen tulajdonságát. Általában ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $v \in V$ csúcs és egy nemüres $A \subseteq V$ részhalmaz, akkor $d_A(v)$ jelöli v csúcs A-beli szomszédainak a számát, azaz $d_A(v) = |N(v) \cap A|$, és azt mondjuk, hogy v befoka $d_A(v)$, ahol szokásos módon $N(v)$ a v csúcs szomszédainak a halmaza. Ahol egyértelmű, ott $d(v)$-t írunk $d_V(v)$ helyett, és természetesen a $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ jelöléseket használjuk.
V-nek egy $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ k-partícióját nemtriviálisnak mondjuk, ha $V_1, V_2, \ldots, V_k$ nem üresek. Továbbá ha van G-nek egy nemtriviális (A, B) partíciója és $v \in A$, akkor $d_B(v)$ v-nek a kifoka.

A terminológiai bevezető után végre rátérhetünk a barátságosság fogalmának felépítésére.

1.1.1. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ részhalmaz és $v \in A$ csúcs olyan, hogy

$$d_A(v) \geq d_{V \setminus A}(v),$$

akkor v-t A-ra nézve barátságos csúcsnak nevezzük.

Ahol egyértelmű, hogy melyik halmazra nézve barátságos egy csúcs, ott röviden annyit írunk, hogy v csúcs barátságos.

Ezt a fogalmat bővítjük ki halmazra, partíciókra is.

1.1.2. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ részhalmaz és $\forall v \in A$ csúcs bartáságos A-ra nézve, akkor az A részhalmazt barátságosnak nevezzük.

1.1.3. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, és létezik V-nek olyan nemüres részhalmazokból álló partíciója, hogy minden csúcs az őt tartalmazó halmazra nézve barátságos, akkor a partíciót barátságos partíciónak nevezzük.

1.1.4. Megjegyzés. Mi elsősorban a $k = 2$ esettel fogunk foglalkozni, azaz két olyan diszjunkt, nemüres részhalmazát keressük a csúcsoknak, melyek uniója kiadja $V(G)$-t, és A, B is barátságos halmazok.

Ha a 1.1.1. Definícióban szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor v-t A-ra nézve erősen barátságos csúcsnak hívjuk. Ezt követve beszélhetünk erősen barátságos részhalmazról, illetve partícióról is.

Végül pedig az egyszerűbb megfogalmazhatóság miatt bevezetjük az alábbi fogalmat.

1.1.5. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, és létezik barátságos partíciója, akkor a gráfot barátságos gráfnak nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy particionálható.

1.2. Gráfok barátságos partícióinak problémaköre

Ebben a részben [12] alapján összegyűjtjük a barátságos partíciók témaköréhez kapcsolódó változatokat, általánosításokat.

Barátságos partíció (Satisfactory/friendly/internal partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek nemtriviális (V_1, V_2) olyan felbontása, hogy bármely $v \in V$

csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i \, (i = 1, 2)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$?

Erősen barátságos partíció (Strongly satisfactory partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek nemtriviális (V_1, V_2) olyan felbontása, hogy bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i \, (i = 1, 2)$, akkor $d_{V_i}(v) > \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$?

A problémának létezik kiegyensúlyozott változata is, ahol a particionálhatóság mellett megköveteljük, hogy a $|V_1| = |V_2|$ feltétel is teljesüljön.

Barátságos bipartíció (Satisfying bisection, balanced satisfactory partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.
Kérdés: Létezik-e V-nek nemtriviális (V_1, V_2) olyan felbontása, hogy $|V_1| = |V_2|$ és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i \, (i = 1, 2)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$?

Előfordulhat, hogy egy adott gráfnak nincs „kiegyensúlyozott" barátságos partíciója, azaz barátságos bipartíciója. Ilyenkor azt a kiegyensúlyozott felbontását keressük, amiben a barátságos csúcsok száma maximális.

Maximálisan barátságos bipartíció (Max satisfying bisection)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.
Kérdés: Adjunk meg V-nek (V_1, V_2) olyan nemtriviális felbontását, hogy $|V_1| = |V_2|$ és maximalizálja a barátságos csúcsok számát!

A barátságos partícióknak számtalan változata ismert. Ezek közül a legismertebbek a barátságtalan partíciók, amikre természetesen megfogalmazhatnánk a fenti problémákat.

Barátságtalan partíció (Co-satisfactroy, unfriendly, external partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek nemtriviális (V_1, V_2) olyan felbontása, hogy bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i \, (i = 1, 2)$, akkor $d_{V_i}(v) \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$?

Megjegyeztük, hogy mi elsősorban azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor a csúcsokat két partícióba osztjuk, de már a definíció is sugallta, hogy lehet k darabba is. Ekkor viszont definiálhatunk a k-partícióknak több különböző változatát is aszerint, hogy milyen fokszámkritériumot írunk elő.

Barátságos k-partíció (Sum satisfactory k-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek $(V_1, \ldots, V_k)$ olyan felbontása, hogy V_i-k nemüresek és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i\,(i = 1, ..., k)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$?

Átlagosan barátságos k-partíció (Average satisfactory k-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik V-nek $(V_1, \ldots, V_k)$ olyan felbontása, hogy V_i-k nemüresek és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i\,(i = 1, ..., k)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{k} \rceil$?

Maximálisan barátságos k-partíció (Max satisfactory k-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek $(V_1, \ldots, V_k)$ olyan felbontása, hogy V_i-k nemüresek és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i\,(i = 1, ..., k)$, akkor $d_{V_i}(v) = \max_{1 \leq j \leq k} d_{V_j}(v)$?

Ahogyan a 2-partícióknál, úgy itt az általános esetben is van kiegyensúlyozott verzió.

Kiegyensúlyozott barátságos k-partíció (Balanced sum satisfactory k-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek $(V_1, \ldots, V_k)$ olyan felbontása, hogy V_i-k nemüresek, $|V_i| = |V_j|$ $(1 \leq i < j \leq k)$ és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i\,(i = 1, ..., k)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$?

Kiegyensúlyozott átlagosan barátságos k-partíció (Balanced average satisfactory k-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik V-nek $(V_1, \ldots, V_k)$ olyan felbontása, hogy V_i-k nemüresek, $|V_i| = |V_j|(1 \leq i < j \leq k)$ és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i\,(i = 1, ..., k)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{k} \rceil$?

Kiegyensúlyozott maximálisan barátságos k-partíció (Balanced max satisfactory k-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-nek $(V_1, \ldots, V_k)$ olyan felbontása, hogy V_i-k nemüresek, $|V_i| = |V_j| (1 \leq i < j \leq k)$ és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i\,(i = 1, ..., k)$, akkor $d_{V_i}(v) = \max_{1 \leq j \leq k} d_{V_j}(v)$?

A partíciók számának növelése mellett a partíciókra különböző fokszámkorlátokat is megfogalmazhatunk. Ezek a q-barátságos partíciók.

1.2.1. Definíció. A $G = (V, E)$ gráf egy $S \subset V$ részhalmazát p-barátságosnak (p-cohesive) nevezzük, ha $\forall v \in S, d_S(v) \geq p$.

1.2.2. Definíció. V egy (A, B) partícióját q-barátságosnak (q-internal) nevezzük valamilyen $q \in (0, 1)$ esetén, ha $\forall u \in A, d_A(u) \geq q d_G(u)$ és $\forall v \in B, d_B(v) \geq (1 - q) d_G(v)$.

1.2.3. Megjegyzés. Tehát az $\frac{1}{2}$-barátságos partíciót hívjuk egyszerűen barátságos partíciónak.

Még általánosabb lehet, ha a csúcsokra írunk elő különböző feltételeket. Ezek az (a, b)-partíciók.

1.2.4. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények és V-nek egy nemtriviális (A, B) partíciója az alábbi feltételekkel:

$$\forall u \in A \;\; d_A(u) \geq a(u) \text{ és } \forall v \in B \;\; d_B(v) \geq b(v),$$

akkor ezt (a, b)-partíciónak nevezzük.

(a, b)-partíció (Decomposition, (a,b)-partition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf és $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények.
Kérdés: Létezik-e G-nek (a, b)-partíciója?

Előfordulhat, hogy nincs szükségünk egy barátságos partícióra, de mégis szeretnénk mondani valamit a gráfban lévő szövetségekről (alliance), azaz olyan csoportokat akarunk meghatározni, akik „szorosabban” kapcsolódnak egymáshoz, mint a többiekhez. A gráfokban lévő szövetségekkel a 7. fejezetben fogunk bővebben foglalkozni, itt lényegében csak a definíciókat említjük meg.

1.2.5. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy

$$d_S(v) + 1 \geq d_{V \setminus S}(v) \ \ \forall v \in S,$$

akkor S-t védekező szövetségnek (defensive alliance) nevezzük.

1.2.6. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy

$$d_S(v) \geq d_{V \setminus S}(v) \ \ \forall v \in S,$$

akkor S-t erősen védekező szövetségnek (strong defensive alliance) nevezzük.

1.2.7. Megjegyzés. Tehát egy erősen védekező szövetség a csúcsok egy barátságos részhalmazát adja.

A védekező szövetségek mellett a matematikában is előfordulnak úgynevezett támadó szövetségek. Itt nem az egymás között lévő kapcsolatokból kell viszonylag soknak lennie, hanem az általuk ismert, de tőlük különböző csúcsoknak kell „függniük" a halmaz pontjaitól, ahol a függés nyilván azt jelenti, hogy több a halmazba bevezető élek száma, mint az adott csúcs további kapcsolatai.

1.2.8. Megjegyzés. Egy $G = (V, E)$ gráfban egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmazból elérhető csúcsok halmazát $\partial(S)$-sel jelöljük, azaz

$$\partial(S) = \{v \in V \setminus S : \ \exists\, s \in S, \ \text{hogy} \ (s, v) \in E(G)\}.$$

1.2.9. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy

$$d_S(v) \geq d_{V \setminus S}(v) + 1 \ \ \forall v \in \partial(S),$$

akkor S-t támadó szövetségnek (offensive alliance) nevezzük.

2. fejezet

Bonyolultság

Most ismertetjük a legfontosabb változatok bonyolultságát, és bebizonyítjuk, hogy egy tetszőleges gráfban való barátságos partíció keresése NP-teljes probléma. A barátságos partíciókra vonatkozó eredmények még [5, 27, 28] cikkekben találhatók meg, a fejezetben felhasznált technikákról bő áttekintést [42] ad.

2.1. Változatok bonyolultsága

2.1.1. Tétel [7, 9]**.** *Az alábbi problémák NP-teljesek:*

- Barátságos partíció
- Barátságos bipartíció
- Barátságtalan bipartíció
- Barátságos k-partíció $(3 \leq k)$
- Kiegyensúlyozott barátságos k-partíció $(3 \leq k)$
- Átlagosan barátságos k-partíció $(3 \leq k)$
- Kiegyensúlyozott átlagosan barátságos k-partíció $(3 \leq k)$
- Maximálisan barátságos k-partíció $(3 \leq k)$
- Kiegyensúlyozott maximálisan barátságos k-partíció $(3 \leq k)$

2.1.2. Tétel [26]**.** *Az alábbi problémák NP-teljesek:*

- Barátságos partíció *keresése csúcssúlyozott merev körű (chordal) gráfokon.*
- Barátságos partíció *keresése élsúlyozott teljes páros gráfokon.*

2.2. A Barátságos partíció NP-teljességének bizonyítása

Ebben a részben először belátjuk, hogy a Barátságos partíció probléma és a Barátságos bipartíció probléma polinomiálisan ekvivalensek. Kölcsönösen visszavezetjük a problémákat egymásra, majd bizonyítjuk, hogy a Barátságos bipartíció probléma NP-teljes, hiszen a Klikk probléma egy speciális esete visszavezethető rá, amiről már régóta ismert, hogy eleme NPC-nek.

2.2.1. Tétel [9]**.** *A* Barátságos partíció *probléma polinomiális időben visszavezethető a* Barátságos bipartíció *problémára.*

Bizonyítás [9] alapján. Legyen G gráf a Barátságos partíció probléma egy tetszőleges bemenete, melynek n csúcsa van $v_1, \ldots, v_n$. Ezen G segítségével gyártsuk le a Barátságos bipartíció probléma egy olyan G' bemenetét melyre teljesül, hogy G-ben pontosan akkor van barátságos partíció, ha G'-ben van barátságos bipartíció. Legyen G' az a gráf, mely G-ből olyan módon keletkezik, hogy hozzáadunk $n-2$ izolált $u_1, \ldots, u_{n-2}$ csúcsot.

Először tegyük fel, hogy G'-ben van barátságos bipartíció. Ekkor mindkét partíció tartalmaz legalább egy csúcsot G-ből, így tehát G particionálható.

Most a másik irányt nézzük. Ha G barátságos és V_1, V_2 egy barátságos partíciója, akkor V_1', V_2' barátságos bipartíció, ahol $V_1' = V_1 \cup \{u_1, \ldots, u_{n-|V_1|} - 1\}$ és $V_2' = V_2 \cup u_{n-|V_1|}, \ldots, u_{n-2}$.

□

2.2.2. Tétel [9]**.** *A* Barátságos bipartíció *probléma polinomiális időben visszavezethető a* Barátságos partíció *problémára.*

Bizonyítás [9] alapján. Legyen G gráf a Barátságos bipartíció probléma egy tetszőleges bemenete, melynek n csúcsa van, ahol most n páros. Ezen G segítségével gyártsunk le egy olyan $G' = (V', E')$ bemenetét a Barátságos partíció problémának, melyre teljesül, hogy G-ben pontosan akkor van barátságos bipartíció, ha G'-ben van barátságos partíció.

G' gráf G-ből az alábbi módon keletkezik. Hozzáadunk két $\frac{n}{2}$ méretű klikket: $A = \{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_{n/2}\}$. Behúzunk G élei mellett minden élt V és A, illetve V

és B csúcsai között, továbbá minden $a_i \in A$ csúcsot összekötünk minden $b_j \in B$ csúccsal, kivéve ha $i = j$.

Legyen (V_1, V_2) egy barátságos bipartíciója G-nek. Ekkor (V_1', V_2') egy barátságos partíciója G'-nek, ahol $V_1' = V_1 \cup A$ és $V_2' = V_2 \cup B$. A és B csúcsai nyilván barátságosak, hiszen például ha $v \in A$, akkor $d_{V_1'}(v) = |A| + \frac{n}{2} - 1 = d_{V_2'}(v)$, továbbá V csúcsai is azok, mivel G-ben is azok voltak.

Legyen (V_1', V_2') egy barátságos partíciója G'-nek, ahol $V_1' = V_1 \cup A_1 \cup B_1$, $V_2' = V_2 \cup A_2 \cup B_2$ és $V_i \subset V, A_i \subset A, B_i \subset B, i = 1, 2$.

2.2.3. Állítás. *(V_1, V_2) barátságos bipartíciója G-nek.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $A_1 \cup B_1 \neq \emptyset$ és $A_2 \cup B_2 \neq \emptyset$, tehát az egyik partíció sem tartalmazhatja $A \cup B$-t.

Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy $V_1' = V_1 \cup A \cup B$ és $V_2' = V_2$. Ekkor speciálisan egy $v \in V_2$ csúcsra teljesül, hogy $d_{V_2}(v) \geq d_{V_1}(v) + n$, ami lehetetlen. Így két eset lehetséges:

1. A és B külön partícióban vannak, azaz $V_1' = V_1 \cup A$ és $V_2' = V_2 \cup B$.
2. A és B közül legalább az egyiket elvágja a partíció.

Az 1. esetben ahhoz, hogy egy A-beli csúcs barátságos legyen $\frac{n}{2} - 1 + |V_1| \leq \frac{n}{2} - 1 + |V_2|$ kell, egy B-belihez pedig $\frac{n}{2} - 1 + |V_1| \geq \frac{n}{2} - 1 + |V_2|$, azaz $|V_1| = |V_2|$ adódik. Továbbá $V_1 \cup V_2$ csúcsai nyilván barátságosak, így ez egy barátságos bipartíciója lesz G-nek.

A 2. esethez tegyük fel, hogy A-t két nemüres részre vágja a partíció, azaz $\emptyset \neq A_1 \subset A$ és $\emptyset \neq A_2 \subset A$, továbbá $B_1, B_2 \subset B$ közül lehet, hogy az egyik üres. Megmutatjuk, hogy ha $a_i \in A_1$, akkor $b_i \in B_2$.

Tegyük fel indirekt, hogy $b_i \in B_1$. Mivel a_i barátságos, így $|A_2| + |B_2| + |V_2| \leq (|A_1| - 1) + (|B_1| - 1) + |V_1|$, azaz $|V_2'| < |V_1'|$.

Legyen $a_j \in A_2$. Ha $b_j \in B_1$, akkor $|A_1| + |B_1| + |V_1| \leq (|A_2| - 1) + (|B_2| - 1) + |V_2|$. Ha $b_j \in B_2$, akkor $|A_1| + (|B_1| - 1) + |V_1| \leq (|A_2| - 1) + |B_2| + |V_2|$. Mindkettőből $|V_2'| \geq |V_1'|$ következik, ami ellentmond az előzőnek. Tehát $|A_1| = |B_2|$ és $|A_2| = |B_1|$, vagyis mindkét klikket elvágja a partíció.

A fokszámkritériumok $a_i \in A_1$ és $b_i \in B_2$ csúcsokra: $|A_2| + (|B_2| - 1) + |V_2| \leq (|A_1| - 1) + |B_1| + |V_1|$ és $(|A_1| - 1) + |B_1| + |V_1| \leq |A_2| + (|B_2| - 1) + |V_2|$. Ezekből adódik, hogy $|A_1| + |B_1| + |V_1| = |A_2| + |B_2| + |V_2|$. Mivel $|A_1| = |B_2|$ és $|A_2| = |B_1|$, így $|V_1| = |V_2|$.

Továbbá mivel $v \in V_1 \cup V_2$ barátságos G'-ben, így $|A_1| + |B_1| = |A_2| + |B_2| = \frac{n}{2}$ miatt v G-ben is barátságos.

□

Ezzel a tételt beláttuk.

□

Most, a polinomiális ekvivalencia bizonyítása után megmutatjuk, hogy általánosságban a Barátságos partíció és a Barátságos bipartíció probléma NP-teljes.

Klikk
Input: Egy $G = (V, E)$ nem teljes gráf és egy pozitív egész $k \leq |V(G)|$.
Kérdés: Létezik-e G-ben legalább k méretű klikk?

2.2.4. Megjegyzés. Most $k = \lceil \frac{|V(G)|}{2} \rceil$ esetet fogjuk felhasználni.

2.2.5. Tétel [9]. *A* Barátságos partíció *és a* Barátságos bipartíció *probléma NP-teljes.*

Bizonyítás [9] alapján. Megmutatjuk, hogy a Klikk probléma polinom időben visszavezethető a Barátságos bipartíció problémára, amiből rögtön következik, hogy a Barátságos bipartíció és a Barátságos partíció problémák NP-teljesek, hiszen [42] miatt Klikk $\in NPC$, és Barátságos bipartíció, Barátságos partíció $\in NP$ triviális.

Legyen G gráf a Klikk probléma egy tetszőleges bemenete, melynek n csúcsa és m éle van. Feltehető, hogy n páros, hiszen egy új izolált csúcs hozzávételével a klikk keresése ugyanolyan nehéz. Jelölje p a G-beli nemélek számát, azaz $p = \frac{n(n-1)}{2} - m$ és a nemléleket jelölje $ne_1, \ldots, ne_p$. Ezen G segítségével gyártsuk le egy olyan $G'' = (V'', E'')$ bemenetét a Barátságos bipartíció problémának, melyre teljesül, hogy G-ben pontosan akkor van legalább $\frac{n}{2}$ méretű klikk, ha G''-ben van barátságos bipartíció.

Legyen $V'' = V \cup V' \cup F \cup F' \cup T \cup T'$, ahol $V' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, $F = \{f_1, \ldots, f_{2p+1}\}$, $F' = \{f'_1, \ldots, f'_{2p+1}\}$, $T = \{t_1, \ldots, t'_{2p+1}\}$, $T' = \{t'_1, \ldots, t'_{2p+1}\}$. F és T két $2p+1$ méretű klikk, V feszíti E éleit, továbbá E''-ben T és V között minden élt behúzunk, F és V között csak azokat az éleket nem, akik (f_{2l}, v_i) vagy (f_{2l+1}, v_j) alakúak, ahol $ne_l = (v_i, v_j)$ nemél G-ben minden $l = 1, \ldots, p$-re. Végül vegyük be E''-be az

$(f_i', f_i), (t_i', t_i)$ éleket minden $i \in \{1, \ldots, 2p+1\}$-re és a (v_j', v_j) élt minden $j \in \{1, \ldots, n\}$-re.

Először tegyük fel, hogy G-ben van egy $\frac{n}{2}$ méretű C klikk. Megmutatjuk, hogy ekkor (V_1'', V_2'') G'-ben barátságos bipartíció, ahol $V_1'' = F \cup F' \cup C \cup C'$, $V_2'' = T \cup T' \cup \bar{C} \cup \bar{C}'$ a $C' = \{v_i' : v_i \in C\}$ jelöléssel. V', F, F', T, T' barátságossága triviális. Kell még, hogy C és $\bar{C}$ is azok. C barátságosságához elég azt látni, hogy ha egy $v \in C$-ből nem megy valamely F-belihez él, akkor az ennek megfelelő nemél $\bar{C}$-ben van. Így $d_{V_1''}(v) = 2p + 1 - (n - 1 - d_{\bar{C}}(v)) + (\frac{n}{2} - 1) + 1 = 2p + 1 + d_{\bar{C}}(v) = d_{V_2''}(v)$, tehát C barátságos.

Hasonló igaz egy $v \in \bar{C}$ csúcs esetén is: $d_{V_1''}(v) = 2p+1-(n-1-d_{\bar{C}}(v)-d_c(v))+d_C(v) = 2p + 2 + d_{\bar{C}}(v) - (n - 2d_C(v)) \leq 2p + 2 + d_{\bar{C}}(v) = d_{V_2''}(v)$, tehát $\bar{C}$ barátságos.

Most tegyük fel, hogy létezik G''-ben egy (V_1'', V_2'') barátságos bipartíció. Belátjuk, hogy ilyenkor létezik egy C $\frac{n}{2}$ méretű klikk is. Nyilvánvaló, hogy f_i és f_i', t_i' és t_i illetve v_j' és v_j bármely barátságos partícióban azonos halmazban vannak.

2.2.6. Állítás. *T-t és F-et nem vághatja szét a partíció.*

Bizonyítás. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel először, hogy T-t (T_1, T_2) részekre vágja, ahol $T_1 \subset V_1''$ és $T_2 \subset V_2''$. Továbbá V-t a partíció (V_1, V_2) részekre vágja, ahol $V_1 \subset V_1''$, $V_2 \subset V_2''$ és V_i-k közül az egyik akár üreshalmaz is lehet. Ekkor egy T_i-beli csúcsra a barátságosság feltétele: $|T_{i+1}|+|V_{i+1}| \leq |T_i|+|V_i|$, amiből $|T_1|+|V_1| = |T_2|+|V_2|$ következik. De tudjuk, hogy $|T_1| + |V_1| + |T_2| + |V_2| = n + 2p + 1$, amely páratlansága okozza az ellentmondást.

Most tegyük fel, hogy F-et (F_1, F_2) részekre vágja, ahol $F_1 \subset V_1''$ és $F_2 \subset V_2''$. Továbbá V-t a partíció (V_1, V_2) részekre vágja, ahol $V_1 \subset V_1''$, $V_2 \subset V_2''$ és V_i-k közül az egyik akár üreshalmaz is lehet. Mivel (V_1'', V_2'') bipartíció, így $|F_1|+|V_1| = |F_2|+|T|+|V_2|$. Tekintsünk egy $v \in F_2$ csúcsot. 3 eset lehetséges:

- Ha $v = f_1$, akkor $|V_1| + |F_1| \leq |V_2| + |F_2|$ kell, ami ellentmond a fentinek.
- Ha v nem kapcsolódik V_2-beli csúcshoz, akkor $|V_1| + |F_1| \leq (|V_2| - 1) + |F_2|$ kell, ami ellentmond a fentinek.
- Ha v nem kapcsolódik V_1-beli csúcshoz, akkor $(|V_1| - 1) + |F_1| \leq |V_2| + |F_2|$ kell, ami ellentmond a fentinek $3 \leq |T|$ miatt.

Tehát beláttuk, hogy az esetek mindegyike ellentmondáshoz vezet.

□

2.2.7. Állítás. *T és F nem lehet ugyanazon partícióban.*

Bizonyítás. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel először, hogy $V_1'' = V_1 \cup V_1'$ és $V_2'' = V_2 \cup V_2' \cup F \cup F' \cup T \cup T'$. Mivel (V_1'', V_2'') bipartíció, így $2|V_1| = 2|F| + 2|T| + 2|V_2|$, azaz $|V_1| - |V_2| = 2(2p+1)$, holott bármely T-beli csúcsra kell, hogy $|V_1| \leq 2p + 1 + |V_2|$. □

Tehát feltehető, hogy (V_1'', V_2'') V-t úgy vágja szét (V_1, V_2)-re, hogy $V_1'' = F \cup F' \cup V_1 \cup V_1'$ és $V_2'' = T \cup T' \cup V_2 \cup V_2'$.

2.2.8. Állítás. *V_1 egy $\frac{n}{2}$ méretű klikk.*

Bizonyítás. Egy $v \in V_1$ csúcsra $d_{V_1''}(v) = 2p + 1 - (n - 1 - d_{V_1}(v) - d_{V_2}(v)) + d_{V_1}(v) + 1$, továbbá $d_{V_2''}(v) = 2p + 1 + d_{V_2}(v)$. Mivel v barátságos G''-ben, így $d_{V_2''}(v) \leq d_{V_1''}(v)$, tehát $\frac{n}{2} - 1 \leq d_{V_1}(v)$, azaz V_1 egy $\frac{n}{2}$ méretű klikk. □

Ezzel a tételt beláttuk. □

3. fejezet

Elégséges feltételek

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy milyen elégséges feltételek ismertek barátságos partíciók létezésére. Néhány triviális feltétel után közlünk néhány érdekes eredményt, melyek szerint sem a barátságos halmaznak, sem a barátságos gráfnak nincs tiltott részgráf karakterizációja. (Külön fejezetben foglalkozunk a szakirodalomban leggazdagabb reguláris gráfokkal.)

3.1. Néhány egyszerű feltétel

Az első elégséges feltétel azt mondja, hogy ha a gráfban találunk két, diszjunkt barátságos halmazt, akkor egy ügyes módszer segítségével ezeket kibővíthetjük az egész gráfot „lefedő” barátságos partícióvá.

3.1.1. Állítás. *Egy gráfnak pontosan akkor létezik barátságos partíciója, ha tartalmaz két, egymástól diszjunkt barátságos részhalmazt.*

Bizonyítás. A nem triviális iránynál tegyük fel, hogy létezik a gráfnak V_1 és V_2 egymástól diszjunkt, barátságos részhalmazai. Ha $V_1 \cup V_2 = V$, akkor készen vagyunk. Különben ha egy $v \in V \setminus (V_1 \cup V_2)$ csúcsra teljesül, hogy $i = 1$ vagy 2-re $d_{V_i}(v) \geq d_{V \setminus V_i}(v)$, akkor tegyük be v-t a V_i halmazba. Ha már nincs több ilyen csúcs, akkor $\forall v \in V \setminus (V_1 \cup V_2)$ csúcsra teljesül, hogy $d_{V_1}(v) < d_{V \setminus V_1}(v)$ és $d_{V_2}(v) < d_{V \setminus V_2}(v)$. Helyezzük be $V \setminus (V_1 \cup V_2)$ elemeit az egyik halmazba. Ekkor G-nek (V_1, V_2) egy barátságos partíciója lesz. $\square$

Egy $S \subseteq E$ élhalmazt **elvágó élhalmaznak** nevezünk, ha az S-beli élek törlésével nő a gráf komponenseinek a száma. Ha S-nek nincs valódi, elvágó részhalmaza, akkor S-t **vágásnak** nevezzük. Ha a csúcsoknak van egy V_1, V_2 partíciója, és egy olyan S elvágó élhalmaz, hogy minden S-beli él egyik végpontja V_1-ben, a másik pedig V_2-ben van, akkor ezt $S = \langle V_1, V_2 \rangle$ jelöli. Egy összefüggő G gráf esetén **kritikus vágásnak** (critical cutset) nevezünk egy $S = \langle V_1, V_2 \rangle$ halmazt, ha vágás, $|V_i| > 1$, ahol $i \in \{1, 2\}$, és egy csúcs az egyik részhalmazból a másikba történő átmozgatásával nem csökkenthető S mérete.

3.1.2. Állítás [51]**.** *Egy összefüggő gráfnak pontosan akkor létezik barátságos partíciója, ha van kritikus vágása.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a gráfnak létezik V_1, V_2 barátságos partíciója. Ekkor legyen $S := \langle V_1, V_2 \rangle$. Erre teljesül, hogy S vágás, $|V_i| > 1$, és egy csúcs átmozgatásával S mérete nem csökkenthető, ugyanis egy csúcsnak legfeljebb annyi szomszédja van a másik halmazban, mint a sajátjában, így átvitel esetén nem csökkenne a két partíció közötti élek száma.

Most tegyük fel, hogy S a gráfnak egy kritikus vágása. Így átmozgatással nem csökkenthető S elemszáma, azaz $i = 1, 2$ esetén bármely $v \in V_i$ csúcsra $d_{V_i}(v) \not< d_{V_{i+1}}(v)$. Ez pedig ekvivalens a barátságos partíció definíciójával.

□

A következő állítás azt mondja ki, hogy ha találunk egy olyan párosítást a gráfban, mely egyben vágás is, akkor az ebből természetese módon adódó két partíció barátságos partíció is lesz. A független vágások (matching cutset) később is elő fognak fordulni, illetve a 7. fejezetben majd bővebben foglalkozunk velük.

3.1.3. Állítás. *Ha egy gráfban van független élekből álló vágás, amely nem tartalmaz lógó élt, akkor a gráfnak létezik barátságos partíciója.*

Bizonyítás. A vágást alkotó élek végpontjainak a foka legalább 2, és az élek függetlensége miatt minden ilyen csúcsnak létezik szomszédja azon csúcshalmazban, mely a vágást követően összefüggőségi komponenst alkot.

□

A következő két eredmény azt mutatja, hogy ha a gráf él-, illetve pontösszefüggőségi száma elég kicsi, akkor biztosan találunk barátságos partíciót.

3.1.4. Megjegyzés. Jelölje $\kappa(G)$ a G gráf pontösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$ pedig az élösszefüggőségi számát, továbbá $\delta(G)$ a minimális fokszámot G-ben.

3.1.5. Állítás [51]. *Ha egy G gráf esetén $\lambda(G) < \delta(G)$, akkor létezik G-nek barátságos partíciója.*

Bizonyítás. A $\lambda(G)$-t adó élek halmaza legyen S. Lássuk be, hogy S kritikus vágása G-nek, ugyanis ekkor a 3.1.2. Állítás alapján készen lennénk. De S nyilván vágás, a mérete nem csökkenthető, hiszen akkor $\lambda(G)$ is kisebb lenne, továbbá $|V_i| > 1$, ugyanis $\lambda(G) < \delta(G)$. □

3.1.6. Állítás [51]. *Ha egy G gráf esetén $\kappa(G) \leq \frac{\delta(G)}{2}$, akkor létezik G-nek barátságos partíciója.*

Bizonyítás. A $\kappa(G)$-t adó csúcsok halmaza legyen S, illetve jelölje V_1 és V_2 az S halmaz elhagyása után keletkezendő két komponenst. Mivel $\kappa(G) \leq \frac{\delta(G)}{2}$, így bármely V_i-beli csúcsra teljesül, hogy az őt tartalmazó halmazra nézve barátságos. Ekkor V_1 és V_2 két, diszjunkt barátságos részhalmaza $V(G)$-nek. Így pedig a 3.1.1. Állítás alapján készen vagyunk. □

3.2. Tiltott részgráf karakterizációk

Most bevezetjük a tiltott részgráf karakterizáció nem létezésének bizonyításához szükséges definíciókat, illetve közlünk egy felső becslést a legkisebb barátságos halmaz elemszámára.

3.2.1. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ barátságos részhalmaz és A-nak nincs valódi barátságos részhalmaza, akkor az A részhalmazt minimálisan barátságosnak nevezzük.

[6]-ban a következő állításnál erősebbet látnak be, de nekünk most ennyi is elég.

3.2.2. Állítás [6]. *Ha $G = (V, E)$ gráfnak létezik egy nemüres $A \subseteq V$ barátságos részhalmaza, akkor polinom időben megadható a gráfban egy minimálisan barátságos részhalmaz.*

3.2.3. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ barátságos részhalmaz és $\forall v \in V(G)$ csúcsra az $A \setminus \{v\}$ nem barátságos, akkor az A részhalmazt lokálisan minimálisan barátságosnak nevezzük.

3.2.4. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ barátságos részhalmaz és $\forall v \notin A$ csúcsra az $A \cup \{v\}$ nem barátságos, akkor az A részhalmazt lokálisan maximálisan barátságosnak nevezzük.

A lokálisan maximálisan barátságos halmaz segítségével megadható egy egyszerű szükséges feltétel a barátságos partíció létezésére.

3.2.5. Megjegyzés. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ lokálisan maximálisan barátságos részhalmaz és $|A| < |V(G)|$, akkor G particionálható.

3.2.6. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ minimálisan barátságos részhalmaz és nincs nála kisebb csúcsszámú minimálisan barátságos részhalmaz a gráfban, akkor az A részhalmazt a legkisebb barátságos halmaznak nevezzük.

Az ilyen részhalmaz méretére megfogalmazható egy triviális felső becslés.

3.2.7. Állítás [51]**.** *Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ legkisebb barátságos részhalmaz, akkor $|A| \leq |V(G)| - \frac{\delta(G)}{2}$.*

De felírható egy másik összefüggés is.

3.2.8. Állítás [51]**.** *Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy nemüres $A \subseteq V$ legkisebb barátságos részhalmaz, akkor $|A| \leq \frac{V(G)}{2} + 1$.*

Bizonyítás [51] alapján. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy $|A| > \frac{V(G)}{2} + 1$. Vezessük be a $B = V(G) \setminus A$ jelölést. Ha $\exists T \subseteq B$ és $\exists v \in A$, hogy T vagy $T \cup \{v\}$ barátságos halmaz, akkor $|T| + 1 \leq \lceil \frac{V(G)}{2} \rceil - 1 < |A|$, ami ellentmond annak, hogy A legkisebb barátságos halmaz volt. Így létezik $V(G)$-nek olyan (V_1, V_2) partíciója (például $(A \setminus \{v\}, B \cup \{v\})$), hogy $\forall P_1 \subset V_1$ nem barátságos és $\forall P_2 \subset V_2$ nem barátságos. Ezen partíciók közül válasszuk azt, ahol a V_1 és V_2 között futó élek száma a legkevesebb, és jelölje ezen élek halmazát S.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $|V_1| \geq \lceil \frac{V(G)}{2} \rceil$. Mivel V_1 nem barátságos, így $\exists v \in V_1$ csúcs, melyre $d_{V_1}(v) < d_{V_2}(v)$ teljesül. Most tekintsük a $(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\})$ partíciót. Legyen S' a $V_1 \setminus \{v\}$ és $V_2 \cup \{v\}$ között futó élek halmaza. Ekkor $|S'| = |S| - d_{V_2}(v) + d_{V_1}(v) < |S|$. Tehát nem lehetséges, hogy $V_1 \setminus \{v\}$ és $V_2 \cup \{v\}$ sem barátságos, vagy nem tartalmaz barátságos részhalmazt. Mivel $V_1 \setminus \{v\}$ nem barátságos, így vagy $V_2 \cup \{v\}$ barátságos halmaz, vagy tartalmaz barátságos részhalmazt.

Ekkor viszont $|V_2 \cup \{v\}| \leq \frac{V(G)}{2} + 1 < |A|$, ami ellentmond annak, hogy A legkisebb barátságos halmaz volt. $\square$

Most belátjuk, hogy nincs olyan részgráf, ami ne lehetne egy speciálisan megkonstruált gráfban barátságos halmaz.

3.2.9. Lemma [51]. *A barátságos halmaznak nincs tiltott részgráf karakterizációja.*

Bizonyítás [51] alapján. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf a barátságos halmazoknak egy tiltott feszített részgráfja.

Konstruáljuk meg a $G' = (V', E')$ gráfot az alábbi módon:

- $V' = V \cup X$, ahol $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ független csúcsok halmaza.
- $E' = E \cup Y$, ahol $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m\}$ olyanok, hogy ha $e_i \in E$ és s és t között vezet, akkor a_i él s és x_i, b_i él t és y_i között.

Ekkor minden $v \in V(G)$ csúcsra $d_V(v) = d_{V' \setminus V}(v)$ a konstrukció miatt, továbbá V barátságos halmaza G'-nek. Ez pedig ellentmond az indirekt feltevésnek, így az állítást beláttuk.

$\square$

3.2.10. Állítás [51]. *A barátságos gráfoknak nincs tiltott részgráf karakterizációjuk.*

Bizonyítás [51] alapján. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf egy tiltott részgráf, azaz nem lehet egy barátságos gráf feszített részgráfja. A 3.2.9. Lemma konstrukciója alapján építsük fel a $G' = (V', E')$ gráfot. Így V barátságos halmaz lesz G'-ben.

Húzzunk be egy élt $x_1, x_2 \in V' \setminus V$ csúcsok közé. Mivel eddig elsőfokú csúcsok voltak, így most $\{x_1, x_2\}$ barátságos halmaz.

Ekkor tehát V és $\{x_1, x_2\}$ barátságosak, és így a 3.1.1. Lemma miatt G' barátságos. Ez pedig ellentmond az indirekt feltevésnek, így az állítást beláttuk.

$\square$

3.2.11. Állítás [51]. *A barátságos partíció-mentes gráfoknak nincs tiltott részgráf karakterizációjuk.*

Bizonyítás [51] alapján. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf egy tiltott részgráf, azaz nem lehet egy barátságos partíció-mentes gráf feszített részgráfja.

Legyen $G' = G \vee K_{n+1}$, ahol $G_1 \vee G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x, y) : x \in V(G_1), y \in V(G_2)\})$. Ekkor G' barátságos, mivel G a G' gráf egy feszített részgráfja. Legyen (A, B) G' barátságos partíciója. Legyen $v \in V(K_{n+1})$, feltehető, hogy $v \in A$. Mivel $d(v) = 2n$, így $|A| \geq \frac{2n}{n} + 1 = n + 1$. Így $|B| \leq n$ és $\nexists v \in K_{n+1} : v \in B$, tehát $V(K_{n+1}) \subset A$.

Mivel minden $u \in V(G)$ csúcsra $V(K_{n+1} \subset N(u))$, így ha $u \in B$, akkor $d_A(u) \geq n+1 > n-1 \geq d_B(u)$. Ezért tehát B-nek üreshalmaznak kell lennie, ami ellentmond (A, B) barátságos partíció mivoltának, így pedig G' barátságos partíció-mentessége következik.

$\square$

4. fejezet

Reguláris gráfok barátságos partíciói

Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy mit tudunk a reguláris gráfok particionálhatóságáról. Ezen gráfosztályra ismert a legtöbb elégséges feltétel, de még itt is rengeteg nyitott kérdés van. Érdekes tény, hogy jelenleg csak $d = 2, 3, 4, 6$-ra ismert, hogy véges sok kivételtől eltekintve biztosan létezik barátságos partíciójuk. [3]-ban fogalmazták meg azt a sejtést, miszerint minden páros d esetén minden d-reguláris gráf barátságos, amennyiben több, mint $2d$ csúcsa van. Ezt [39]-ben aszimptotikusan majdnem minden $2k$-reguláris gráfra belátták.

A kis esetek után áttekintjük a komplementer gráfra vonatkozó tételeket, majd megvizsgáljuk az általános esetet.

4.1. Kis esetek

A $d = 1$ eset triviális, a $d = 2, 3, 4$ még könnyen látható, de a 6-reguláris gráfokra történő bizonyítás több előkészületet igényel, és jóval bonyolultabb is.

4.1.1. Tétel. *Ha egy gráf 2-reguláris és nem K_3, akkor létezik barátságos partíciója.*

Bizonyítás. Mivel a gráf összefüggő és 2-reguláris, így nyilván egy kör. Továbbá mivel nem K_3, ezért legalább 4 csúcsa van. Ekkor bontsuk a kör mentén két részre úgy a gráfot, hogy mindkét halmazba legalább 2 csúcs kerüljön. Így minden csúcsra teljesül, hogy legalább az egyik szomszédja a saját partíciójában van. Tehát egy barátságos partíciót kaptunk. □

A következő tétel ezen alakjában először [51]-ben jelent meg, de [9]-ben egy egyszerűbb bizonyítás is fellelhető. Azonban több, mint 10 évvel korábban [44]-ben belátták, hogy egy olyan 3-reguláris gráf, ami nem K_4 vagy $K_{3,3}$ mindig tartalmaz független vágást, amiből pedig következik, hogy a gráfnak létezik barátságos partíciója. Az alábbiakban viszont egy mindháromtól különböző bizonyítást közlünk.

4.1.2. Tétel [44, 51]. *Ha egy gráf 3-reguláris és nem K_4 vagy $K_{3,3}$, akkor létezik barátságos partíciója.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy a $G = (V, E)$ gráf 3-élösszefüggő, hiszen különben a 3.1.5. Állítás miatt nyilván barátságos. Így 2-élösszefüggő is, tehát a Petersen-tétel [45] alapján van a gráfban teljes párosítás. Ha elhagyjuk a teljes párosítást adó éleket, akkor egy 2-reguláris gráfot kapunk, tehát vagy egy Hamilton-kört, vagy körök diszjunkt unióját.

Ha van legalább két komponensünk, akkor ezek az eredeti G gráf egy barátságos részhalmazai. Így a 3.1.1. Állítás miatt készen vagyunk.

Ha egy körünk van, akkor tekintsünk két szomszédos $u_1, v_1 \in V(G)$ csúcsot a körön. Ha az eredeti gráfban belőlük kimenő harmadik élek nem metszik egymást, akkor meghatároznak két pontdiszjunkt kört, így a fentiek miatt van a gráfnak barátságos partíciója. Ha metszik, akkor legyenek u_1 illetve v_1 ezen szomszédai u_2 és v_2. Tegyük fel, hogy ők nem szomszédosak, azaz létezik $w \in V(G)$, hogy a körön a w pont u_2 és v_2 között helyezkedik el. Ekkor tekintsük a w-ből kimenő utolsó élt. Ha ennek a másik végpontja a körön v_1 és u_2 között, vagy u_1 és v_2 között van, akkor két diszjunkt kört kapunk. Tehát csak v_2 és u_2 között lehet, de ekkor megint könnyen találhatunk két diszjunkt kört.

Így tehát azt kaptuk, hogy v_2 és u_2 szomszédos csúcsok. De ekkor a fenti megfontolások figyelembevételével adódik, hogy ha v_1-nek nem u_2 a szomszédja a körön, hanem w_1, akkor w_1 szomszédjának u_1 és v_2 között kell elhelyezkednie a körön. És így tovább a többi csúcsra. De $|V(G)| \geq 8$ esetén már könnyen látható, hogy van két diszjunkt kör a gráfban, különben $|V(G)| = 4$ esetén a gráf K_4, $|V(G)| = 6$ esetén pedig $K_{3,3}$.

□

4.1.3. Tétel [51]. *Ha egy gráf 4-reguláris és nem K_5, akkor létezik barátságos partíciója.*

Bizonyítás [9] alapján. Legyen G egy olyan 4-reguláris gráf, ami nem K_5. Feltehető róla, hogy összefüggő, különben triviális módon adódna, hogy G barátságos.

Tegyük fel, hogy G-ben létezik egy C háromszög a v_1, v_2, v_3 csúcsokkal. Ha minden $V(G) \setminus V(C)$ csúcsnak legfeljebb két szomszédja illeszkedik C-re, akkor G barátságos, hiszen $V_1 = V(C)$ és $V_2 = V(G) \setminus V(C)$ halmazok barátságos partíciót alkotnak. Különben legyen v_4 az a csúcs, amely szomszédja minden C-beli csúcsnak. Ha minden más csúcsnak legfeljebb két szomszédja van ezen négy csúcs közül, akkor az előbbiekhez hasonlóan $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ és $V \setminus V_2$ barátságos partícióját alkotják G-nek. Különben mivel $G \neq K_5$, létezik egy v_5 csúcs, amelynek pontosan három szomszédja van v_1, v_2, v_3, v_4 közül. Ekkor $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ és $V_2 = V \setminus V_1 \neq \emptyset$ barátságos partíciót alkotnak.

Most tegyük fel, hogy G háromszögmentes, és legyen G legrövidebb köre C. Mivel C hossza $k \geq 4$, nincs három olyan csúcs C-n, akiknek közös szomszédja lenne C-n kívül, különben létezne egy legfeljebb $\lfloor k/3 \rfloor + 2$ hosszú kör, ami $k \geq 4$ esetén rövidebb, mint C. Így $V_1 = V(C)$ és $V_2 = V \setminus V_1$ egy barátságos partíció.

$\square$

Habár nem tudjuk, hogy az 5-reguláris gráfok véges sok kivételtől eltekintve barátságosak-e, érdekes módon 6-regulárisokra igaz az állítás.

4.1.4. Tétel [3]**.** *Ha egy gráf* 6*-reguláris és legalább* 14 *csúcsa van, akkor létezik barátságos partíciója.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány újabb fogalomra és egy segédállításra. Emlékeztetőül közöljük a p-barátságos részhalmaz és a q-barátságos partíció fogalmát.

A $G = (V, E)$ gráf egy $S \subset V$ részhalmazát p-**barátságosnak** nevezzük, ha bármely $v \in S$ csúcsra $d_S(v) \geq p$. Illetve p-**morzsoltnak** (p-crumble) nevezzük, ha nincs p-barátságos részhalmaza.

V egy (A, B) partícióját q-**barátságosnak** nevezzük valamilyen $q \in (0, 1)$ esetén, ha $\forall u \in A, d_A(u) \geq q d_G(u)$ és $\forall v \in B, d_B(v) \geq (1 - q) d_G(v)$. Tehát az $\frac{1}{2}$-barátságos partíciót hívjuk egyszerűen barátságos partíciónak.

Egy (A, B) q-barátságos partíciót **egzaktnak** nevezünk, ha $|A| = qn$, és **közel-egzaktnak**, ha $||A| - qn| < 1$, ahol n természetesen a gráf csúcsainak a számát jelöli. $q = \frac{1}{2}$ esetén az egzakt partíciót **bipartíciónak**, a közel-egzakt partíciót **közel-bipartíciónak** nevezzük.

Továbbá jelölje a $G = (V, E)$ gráfban az (A, B) partíció által indukált vágást $E(A, B)$, tehát $E(A, B) = \{(u, v) \in E(G), u \in A, v \in B\}$.

4.1.5. Lemma [3]**.** *Legyen egy $G = (V, E)$ gráfban bármely $0 < k < |V|$ számra az (A, B)*

partíció a csúcsoknak egy olyan felbontása, hogy $E(A, B)$ minimális az összes $|A| = k$ vagy $|B| = k$ típusú partíció közül. Ekkor teljesül az alábbiak közül az egyik:

1. *A l-barátságos és B m-barátságos valamilyen pozitív, egész l, m-re, ahol $l+m = \delta(G)$, vagy:*

2. (a) *A l-barátságos és B m-barátságos valamilyen pozitív, egész l, m-re, ahol $l+m = \delta(G) - 1$,*
   (b) *azok az $u \in A$ csúcsok, akikre $d_A(u) = l$ és azok a $v \in B$ csúcsok, akikre $d_B(v) = m$ együttesen egy teljes páros gráfot tartalmaznak részgráfként,*
   (c) *minden $u \in A$ csúcsra, akire $d_A(u) = l$, a $B \cup \{u\}$ egy $(m+1)$-barátságos halmaz. És hasonlóan, $\forall v \in B$ csúcsra, akire $d_B(v) = m$, az $A \cup \{v\}$ egy $(l+1)$-barátságos halmaz.*

Bizonyítás [3] alapján. Legyen $u \in A$ és $v \in B$. Ha $(u, v) \notin E(G)$, akkor

$$\begin{aligned}|E((A \setminus \{u\}) \cup \{v\}), (B \setminus \{v\}) \cup \{u\}))| &= \\ = d_A(u) - d_B(u) + d_B(v) - d_A(v) &\leq \\ \leq 2[d_A(u) + d_B(v) - \delta(G)]\end{aligned}$$

Ha $(u, v) \in E(G)$, akkor

$$\begin{aligned}|E((A \setminus \{u\}) \cup \{v\}), (B \setminus \{v\}) \cup \{u\}))| &= \\ = d_A(u) - d_B(u) + (d_B(v) + 1) - (d_A(v) - 1) &\leq \\ \leq 2[d_A(u) + d_B(v) - (\delta(G) - 1)]\end{aligned}$$

Mivel $E(A, B)$ minimális, így tehát két különböző halmazba tartozó u és v csúcsok befokainak összege legalább $\delta(G)-1$, ha u és v szomszédok, különben ez az összeg legalább $\delta(G)$. Most tegyük fel, hogy u és v minimális befokúak, és legyen például $d_A(x) = l$.

Ekkor ha $(u, v) \notin E(G)$, akkor következik (1), hiszen $d_B(v) \geq \delta(G) - l$ a korábbi számolás miatt. Így $m := \delta(G) - l$ választással B m-barátságos, ugyanis $d_B(v) \geq m$, mivel v minimális volt.

Ha pedig $(u, v) \in E(G)$, akkor (2a) következik, hiszen akkor a korábbi számolás miatt $d_B(v) \geq \delta(G) - l - 1$. Így ha $m := d - l - 1$, akkor B m-barátságos az előzőekhez hasonlóan.

A (2b) abból adódik, hogy bármely u és v minimális befokú csúcsokra teljesül, hogy vagy nem fut köztük él, és akkor az (1)-es eset áll fenn, vagy fut, és ekkor pedig valóban egy teljes páros részgráfot kapunk.

Végül ($2c$)-t az alábbi vizsgálódásból kapjuk. ($2b$) miatt az áthelyezendő u csúcs minden B-ben minimális befokú csúccsal össze van kötve, így ha áthelyezzük B-be, akkor ezek befoka 1-gyel nő. A többi B-beli csúcs befoka eddig is legalább $m+1$ volt, illetve mivel az áthelyezett u csúcs A-ban minimális befokú volt, azaz $d_A(v) = l$, és ($2a$) miatt $m + l + 1 = \delta(G)$, így $\delta(G) \le d(u) = d_A(u) + d_B(u)$ alapján adódik, hogy $m+1 \le d_B(u)$.

□

4.1.6. Következmény [3]**.** *Minden n csúcsú d-reguláris gráfnak van egy legalább $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ csúcsú $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-barátságos részhalmaza, ha d páros, és egy legalább $\frac{n}{2}+1$ csúcsú, ha d páratlan.*

Bizonyítás [3] alapján. Tekintsük a $G = (V, E)$ gráfnak egy olyan közel-bipartícióját, amely minimalizálja $|E(A, B)|$-t. Ha d páros, akkor A és B közül legalább az egyik $\frac{d}{2}$-barátságos. Ha d páratlan és sem A, sem B nem $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-barátságos, akkor a 4.1.5. Lemma ($2a$) része miatt mindkettő $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$-barátságos, és a ($2c$) rész miatt mindkettő $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-barátságossá tehető egy másik halmazbeli csúcs hozzávételével.

□

Most már teljesen felkészültünk arra, hogy bebizonyítsuk a 4.1.4. Tételt, miszerint ha egy gráf 6-reguláris és legalább 14 csúcsa van, akkor particionálható.

4.1.4. Tétel bizonyítása [3] alapján. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ n csúcsú d-reguláris gráfnak nincs barátságos partíciója. Legyen (A, B) olyan közel-bipartíció, amely minimalizálja $|E(A, B)|$-t. Ekkor a 4.1.5. Lemma miatt A vagy B 3-barátságos. Tegyük fel, hogy A 3-barátságos, és B nem az.

Azokat a $v \in B$ csúcsokat, melyekre $d_A(v) > 3$ helyezzük át B-ből A-ba. Ha A 3-barátságos, akkor $A \cup \{v\}$ is 3-barátságos lesz. Továbbá tudjuk, hogy ha B 3-morzsolt, akkor $B \setminus \{v\}$ is az. B valóban 3-morzsolt, hiszen feltettük, hogy G nem particionálható, így a fenti eljárásnak triviális partícióval kell végződnie, azaz oda kell jutnunk, hogy $B = \emptyset$. Egy v csúcs A-ból B-be történő átmozgatásakor $|E(A, B)|$ értékét csökkentjük, méghozzá legalább $|-d_A(v) + d_B(v)| = |-d_A(v) + (d(v) - d_A(v))| = |2d_A(v) - 6| \ge 2$ mértékben. Tehát egészen addig, míg $|B| = 1$ nem lesz, minden lépésben legalább 2-vel csökkentjük a vágás méretét. Tehát az utolsó előtti csúcs áthelyezésénél legalább 4-gyel, majd az utolsónál legalább 6-tal csökken a $|E(A, B)|$ értéke, s végül $|E(A, B)| = 0$ lesz. Ennek segítségével alulról tudjuk becsülni a kezdeti vágás értékét: $|E(A, B)| \ge 2|B| + 6$.

Mivel A 3-barátságos és B 2-barátságos, a 4.1.5. Lemma miatt azok az A-beli csúcsok, amelyekből 3 él megy át, és azok a B-beli csúcsok, amelyekből 4 él megy át a másik csúcshalmazba, együtt egy teljes páros részgráfot alkotnak. Így $\forall u \in A$ esetén $d_B(u) \leq 2$, kivéve legfeljebb 4 darab 3 kifokú csúcsot, akik azokkal a B-beli csúcsokkal szomszédosak, akiknek a kifoka legfeljebb 4. (Az az eset nem állhat fenn, hogy B-ben nincs olyan, akiből 4 él menne át A-ba, mert akkor vagy lenne olyan, akiből 5 él megy át, de ez ellentmond B 2-barátságosságának, vagy mindenkiből 3 él menne át, de ekkor B 3-barátságos lenne.) Így tehát felülről is meg tudjuk becsülni a vágás értékét: $|E(A, B)| \leq 2|A| + 4$.

A kettő becslést egybevetve adódik, hogy $2|B| + 6 \leq |E(A, B)| \leq 2|A| + 4$. Ebből azt kapjuk, hogy $|B| + 1 \leq |A|$, azaz $|B| + 1 = |A|$. Vagyis n páratlan és B 3-morzsolt, pontosan 4 csúcs van A-ban, akinek a kifoka 3, és minden lépésben (kivéve az utolsó kettőt) $|E(A, B)|$ pontosan kettővel csökkent. Ha $n \geq 9$, akkor $|B| \geq 4$, így az első két mozgatásnál a csúcsok kifoka 4 volt. Legyen $v', v'' \in B$ ez az első két csúcs, továbbá legyen $(A', B') = (A \cup \{v'\}, B \setminus \{v'\})$ a keletkező partíció az első, és $(A'', B'') = (A \cup \{v', v''\}, B \setminus \{v', v''\})$ a második mozgatás után. Ekkor persze $|E(A', B')| = |E(A, B)| - 2$ és $|E(A'', B'')| = |E(A, B)| - 4$.

A 4.1.5. Lemma (2c) része miatt $\forall u \in A'$ csúcsra $d_B(u) = 2$. Tehát $\forall u \in A''$ csúcsra $d_B(u) = 2$ kivéve 4-et, akinek a kifoka 1. Tegyük fel, hogy vannak a 2 kifokú csúcsok között szomszédosak, jelölje őket u' és u''. Át lehet helyezni mindkettő csúcsot B''-be úgy, hogy a vágás értéke csak 3-mal nő. Ekkor $|E(A'' \setminus \{u', u''\}, B'' \cup \{u', u''\})| = |E(A'', B'')| + 3 < |E(A, B)|$. Ez a mozgatás egy olyan közel-bipartíciót eredményez, amely ellentmond $|E(A, B)|$ minimális voltának. Ha nincsenek szomszédosak, akkor A''-ban a 2 kifokú csúcsok független ponthalmazt alkotnak, tehát az összes szomszédjuknak A''-ban 1 a kifoka, és 5 a befoka. Ez azt eredményezi, hogy legfeljebb 5 olyan csúcs van A''-ban, akinek a kifoka 2. Tehát $|A''| \leq 9 \Rightarrow |A| \leq 7 \Rightarrow n \leq 13$. □

4.2. A komplementer gráfra vonatkozó eredmények

[3]-ban vizsgálták először, hogy vajon egy reguláris gráf komplementerében létezik-e barátságos partíció. Jó néhány eredmény született, melyek segítségével a reguláris gráfok particionálhatóságáról is többet tudunk, hiszen egy reguláris gráf komplementere is reguláris.

Ehhez először szükségünk lesz a barátságtalan partíciók általánosítására. Utána belátjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén minden $(n-2)$- és $(n-3)$-reguláris gráf barátságos. Vegyük észre, hogy az $(n-1)$-reguláris gráf a teljes gráf, ami nyilvánvalóan nem particionálható.

Ezen rész minden eredménye [3]-ból való, így ezt külön a tételeknél és a bizonyításoknál nem tüntetjük fel.

V egy (A,B) partícióját q-**barátságtalannak** nevezzük valamilyen $q \in (0,1)$ értékre, ha minden $u \in A$ csúcsra $d_B(u) \geq q d_G(u)$ és minden $v \in B$ csúcsra $d_A(v) \geq (1-q)d_G(v)$. Tehát az $\frac{1}{2}$-barátságtalan partíciót hívjuk egyszerűen barátságtalan partíciónak.

Egy (A,B) q-barátságtalan partíciót **egzaktnak** nevezünk, ha $|A| = qn$, és **közel-egzaktnak**, ha $||A| - qn| < 1$, ahol n természetesen a gráf csúcsainak a számát jelöli. Egy $\frac{1}{2}$-egzakt partíciót **bipartíciónak**, és $q = \frac{1}{2}$ esetén a közel-egzakt partíciót **közel-bipartíciónak** nevezzük.

Érdekes tény, hogy míg egy tetszőleges G gráf esetén nem tudjuk, hogy létezik-e q-barátságos partíciója, addig q-barátságtalan partíciója mindig létezik.

4.2.1. Állítás. *Ha G egy tetszőleges gráf, akkor minden $q \in (0,1)$ számra létezik G-nek q-barátságtalan partíciója.*

Az alábbi állítás teremt kapcsolatot egy G-beli egzakt, q-barátságos, és egy $\bar{G}$-beli egzakt, $(1-q)$-barátságtalan partíció között.

4.2.2. Állítás. *Ha $G = (V,E)$ egy tetszőleges gráf, akkor minden $q \in (0,1)$ számra G-nek egy egzakt, q-barátságos partíciója $\bar{G}$-nek egy egzakt, $(1-q)$-barátságtalan partíciója.*

Bizonyítás. Legyen $|V| = n$ és legyen (A,B) G-nek egy egzakt, q-barátságos partíciója. Ekkor a definíciók értelmében $|A| = qn$, $|B| = (1-q)n$ és $\forall u \in A, d_A(u) \geq q d_G(u)$ és $\forall v \in B, d_B(v) \geq (1-q)d_G(v)$.

A és B részhalmazok által meghatározott részgráfok komplementerét nézve kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\forall v \in V \text{ esetén} && d_{\bar{G}}(v) = n - d_G(v) - 1 \\
&\forall v \in A \text{ esetén} && d_{\bar{B}}(v) = |B| - d_B(v) = (1-q)n - (d_G(v) - d_A(v)) \geq \\
& && \geq (1-q)(n - d_G(v)) > (1-q)d_{\bar{G}}(v) \\
&\forall v \in B \text{ esetén} && d_{\bar{A}}(v) = |A| - d_A(v) = qn - (d_G(v) - d_B(v)) \geq \\
& && \geq q(n - d_G(v)) > (1-q)d_{\bar{G}}(v)
\end{aligned}
$$

Így (A, B) egy egzakt, $(1-q)$-barátságos partíció $\bar{G}$-ben.

$\square$

4.2.3. Állítás. *Ha $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, akkor minden $q \in (0, 1)$ számra G-nek egy egzakt, $(1-q)$-barátságtalan partíciója $\bar{G}$-nek egy egzakt, q-barátságos partíciója. Sőt, $\forall v \in V(G)$ csúcsra $qd_{\bar{G}}(v)$ egész.*

Bizonyítás. Legyen $|V| = n$ és legyen (A, B) G-nek egy egzakt, $(1-q)$-barátságtalan partíciója. Ekkor a definíciók értelmében $|A| = qn$, $|B| = (1-q)n$ és $\forall u \in A, d_B(u) \geq (1-q)d_G(u)$ és $\forall v \in B, d_A(v) \geq qd_G(v)$.

$$\forall v \in V \text{ esetén} \qquad d_{\bar{G}}(v) = n - d_G(v) - 1$$

$$\begin{aligned}\forall v \in A \text{ esetén} \qquad d_{\bar{A}}(v) = |A| - d_A(v) - 1 = qn - (d_G(v) - d_B(v)) - 1 \geq \\ \geq q(n - d_G(v)) - 1 = qd_{\bar{G}}(v) - (1-q)\end{aligned}$$

Tehát $d_{\bar{A}}(v) \geq qd_{\bar{G}}(v)$, mivel $d_{\bar{A}}(v) qd_{\bar{G}}(v)$ egészek és $0 < q < 1$.

$$\begin{aligned}\forall v \in B \text{ esetén} \qquad d_{\bar{B}}(v) = |B| - d_B(v) = (1-q)n - (d_G(v) - d_A(v)) - 1 \geq \\ \geq (1-q)(n - d_G(v)) - 1 = (1-q)d_{\bar{G}}(v) - q\end{aligned}$$

Az előző megfontolásokhoz hasonlóan adódik, hogy $d_{\bar{B}}(v) \geq (1-q)d_{\bar{G}}(v)$, tehát (A, B) $\bar{G}$-nek egy egzakt, q-barátságos partíciója. $\square$

4.2.4. Következmény. *Ha G-nek van barátságos bipartíciója, akkor $\bar{G}$-nek van barátságtalan bipartíciója.*

4.2.5. Következmény. *Ha G-ben minden csúcs foka páros és $\bar{G}$-nek van barátságtalan bipartíciója, akkor G-nek van barátságos bipartíciója.*

4.2.6. Tétel. *Ha n páros, akkor minden $(n-2)$-reguláris gráfnak van barátságos bipartíciója.*

Bizonyítás. Egy $(n-2)$-reguláris gráfnak a komplementere egy teljes párosítás. A független élek egyik végpontja az egyik, a másik végpontja a másik partícióba kerüljön. Ez egy barátságtalan bipartíció. Ekkor a 4.2.5 Következményből adódik az állítás.

$\square$

4.2.7. Tétel. *Egy G $(n-3)$-reguláris gráfnak pontosan akkor van barátságos partíciója, ha $\bar{G}$-ben legfeljebb egy páratlan hosszú kör van. Továbbá ez a partíció közel-bipartíció.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$-nek létezik (A, B) barátságos partíciója. $\bar{G}$ nyilván 2-reguláris, így ha $|V| = n$ páros, akkor $\bar{G}$ páros gráf, így nincsen benne páratlan hosszú kör. Továbbá G-ben minden csúcs befoka legalább $\frac{n}{2} - 1$, ezért $|A| = |B| = \frac{n}{2}$.
Ha n páratlan, akkor legyen például $|A| \geq |B|$. B-ben a minimális befok $\frac{n-3}{2}$, így $|B| = \frac{n-1}{2}$, $|A| = \frac{n+1}{2}$ és ekkor (A, B) közel-bipartíció. Továbbá $\bar{G}$-ben $E(A, B) = 2|B| = n - 1$, és így $|E(A)| = (2|A| - |E(A, B)|)/2 = 1$. Tehát egy él kivételével az (A, B) partíció páros gráfot alkot, és mivel $\bar{G}$-ben minden csúcs foka 2, így legfeljebb egy páratlan hosszú kör van $\bar{G}$-ben.

Tegyük fel, hogy $\bar{G}$-ben legfeljebb egy páratlan hosszú kör van. $\bar{G}$ nyilván 2-reguláris, így előáll csúcsdiszjunkt körök uniójaként. A körök csúcsait alternáló módon helyezzük el az A és B partícióban. Mivel legfeljebb egy páratlan hosszú kör van, így $||A| - |B|| \leq 1$, tehát (A, B) közel-bipartíció. Ez egy barátságos partíciója G-nek. A nemnagyobb partíciót jelölje például B, ekkor B egy klikk. Ha $|A| = |B|$, akkor A is az, ha $|A| = |B|+1$, akkor egy olyan klikk, amiből hiányzik egy él. Így a minimális befok $|B| - 1$. És mivel $|B| - 1 \geq \frac{n-3}{2}$, így (A, B) egy barátságos partíció. □

4.3. Általános eset

Láttuk, hogy már $d = 5$-re sem tudjuk, hogy az 5-reguláris gráfok particionálhatóak-e, illetve hogy a páros reguláris esetre az a sejtés [3], hogy minden páros d esetén minden d-reguláris gráf barátságos, ha több, mint $2d$ csúccsal rendelkezik. Habár ezt [39]-ben aszimptotikusan majdnem minden $2k$-reguláris gráfra bebizonyították, még mindig nyitott a sejtés. Emellett érdekes megvizsgálni, hogy ha a regularitás mellett további feltételeknek is eleget tesz a gráf, akkor vajon mindig barátságos lesz-e. Látni fogjuk, hogy a háromszögmentes és Euler-gráf kritérium már elegendő.

4.3.1. Tétel [51]**.** *Ha egy $G = (V, E)$ Euler-gráf háromszögmentes, akkor létezik barátságos partíciója.*

Közismert, hogy egy gráf pontosan akkor Euler-gráf, ha bármely csúcsának a fokszáma páros. Ennek egy speciális esete, ha minden csúcs foka $2k$, és így a gráf reguláris.

4.3.2. Következmény [51]**.** *Ha egy $G = (V, E)$ gráf háromszögmentes és $2k$-reguláris, akkor létezik barátságos partíciója.*

4.3.3. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a páratlan reguláris esetből következik a páros, azaz ha tudnánk, hogy bizonyos csúcsszám felett minden $2k + 1$-reguláris gráf particionálható, akkor a páros sok és elegendően nagy számú csúccsal rendelkező $2k+2$-reguláris gráfokra igaz lenne a sejtés.

Minden páros sok csúccsal rendelkező, $2k+2$-reguláris, $2k+2$-élösszefüggő gráfban létezik teljes párosítás. Ezt elhagyva egy $2k+1$-reguláris gráfot kapunk, amire ha tudjuk, hogy barátságos, akkor abból az is rögtön következik, hogy erősen barátságos. Így visszatéve a párosításbeli éleket semelyik csúcsnál sem tud elromlani a fokszámkritérium. A másik esetben, azaz ha az élössszefüggőségi szám kisebb, akkor a 3.1.6. Állítás miatt vagyunk készen.

Végül érdekességként megjegyezzük, hogy [3]-ban minden k-ra konstruáltak olyan $2k$-reguláris $3k+2$ csúcsú gráfot, mely nem particionálható. A sejtésük az, hogy azokban a $2k$-reguláris gráfokban nem létezik barátságos partíció, melyeknek a komplementere nem összefüggő.

5. fejezet

Approximáció

Gráfelméleti, operációkutatási feladatoknál gyakran jutunk arra az eredményre, hogy egy probléma NP-teljes. Ilyenkor nem sok esély van gyors algoritmus kifejlesztésére, ezért inkább az a cél, hogy egy elég jó közelítést, approximációt találjunk. Ha sikerül egy hatékony, azaz polinomiális algoritmust alkotni, amiről belátható, hogy az általa adott eredmény a tényleges megoldástól nincs nagyon messze, akkor bizonyos helyzetekben jól alkalmazható. Ezek kérdések és módszerek világába [54] ad jó bevezetést.

Láttuk, hogy annak eldöntése, hogy egy tetszőleges gráf barátságos-e NP-teljes probléma. Így joggal merül fel a kérdés, tudunk-e olyan partíciót létrehozni, ami habár nem barátságos, de szinte minden csúcs az. Azaz szeretnénk a gráf csúcsait olyan partícióra bontani, hogy abban maximalizáljuk a barátságos csúcsok számát.

A Maximálisan barátságos bipartíció problémája először [7]-ben jelent meg, később [11]-ben foglalkoztak vele, a legújabb eredmény pedig 2011-ből, [48]-ból származik, ahol belátják, hogy 2-approximálható.

Emlékeztetőül közöljük az első fejezetben már bevezetett Barátságos bipartíció, és a Maximálisan barátságos bipartíció problémák definícióját.

Barátságos bipartíció
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.
Kérdés: Létezik-e V-nek nemtriviális (V_1, V_2) olyan felbontása, hogy $|V_1| = |V_2|$ és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i$ $(i = 1, 2)$, akkor $d_{V_i}(v) \geq \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$?

Maximálisan barátságos bipartíció

Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.

Output: Adjunk meg V-nek (V_1, V_2) olyan nemtriviális felbontását, hogy $|V_1| = |V_2|$ és maximalizálja a barátságos csúcsok számát!

5.1. Maximálisan barátságos bipartíció polinom idejű approximációs sémája

5.1.1. Definíció. Tekintsünk egy A maximalizálási problémát, és annak egy I bemenetét. Legyen S I-nek a megoldása, jelölje $f(I, S)$ a megoldás értékét, továbbá $OPT(I)$ az I-re adható optimális megoldás értékét. Ekkor egy algoritmust k-approximáló algoritmusnak nevezünk A-ra nézve, ha $1 \leq k$ és bármely I bemenetre adott S megoldás olyan, hogy $\frac{OPT(I)}{k} \leq f(I, S)$.

5.1.2. Definíció. Egy A maximalizálási problémának van polinom idejű approximációs sémája (polinomial-time approxiation scheme, PTAS), ha bármely $\epsilon > 0$ konstanra létezik A-nak polinom idejű $(1 + \epsilon)$-approximációja.

[7]-ben [46] egyik tételének felhasználásával belátják, hogy ha $P \neq NP$, akkor nem létezik PTAS a Maximálisan barátságos bipartíció problémára.

5.1.3. Tétel [7]. *A* Maximálisan barátságos bipartíció *problémának nem létezik polinom idejű approximációs sémája, kivéve, ha $P = NP$.*

Érdekességként megjegyezzük, hogy a fentiek a barátságtalan partíciókra is igazak.

Barátságtalan bipartíció

Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.

Kérdés: Létezik-e V-nek nemtriviális (V_1, V_2) olyan felbontása, hogy $|V_1| = |V_2|$ és bármely $v \in V$ csúcsra igaz, hogy ha $v \in V_i (i = 1, 2)$, akkor $d_{V_i}(v) \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$?

Maximálisan barátságtalan bipartíció

Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.

Output: Adjunk meg V-nek (V_1, V_2) olyan nemtriviális felbontását, hogy $|V_1| = |V_2|$ és maximalizálja a barátságtalan csúcsok számát.

5.1.4. Tétel [7]. *A* Maximálisan barátságtalan bipartíció *problémának nem létezik polinom idejű approximációs sémája, kivéve, ha* $P = NP$.

5.2. Maximálisan barátságos bipartíció konstans approximációja

5.2.1. Tétel [7]. *A* Maximálisan barátságos bipartíció *probléma* 3*-approximálható.*

Ennek a bizonyításához szükségünk lesz néhány tételre, amit itt a levezetés nélkül közlünk. Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy egy (V_1, V_2) partíciót **majdnem kiegyensúlyozottnak** nevezünk, ha $||V_1| - |V_2|| = 1$.

5.2.2. Tétel [7]. *Egy* G *páratlan sok csúccsal rendelkező gráfnak van olyan majdnem kiegyensúlyozott bipartíciója, amelynél az* $\frac{|V(G)|+1}{2}$ *elemszámú részben minden csúcs barátságos. Ráadásul ez a partíció polinom időben megtalálható.*

5.2.3. Tétel [7]. *Egy* G *páros sok csúccsal rendelkező gráfban polinom időben megadható egy olyan kiegyensúlyozott bipartíció, melyben legalább* $\frac{|V(G)|-t}{3}$ *barátságos csúcs van, ahol* t *azon csúcsok száma* G*-ben, amelyek* $n-1$ *fokúak.*

5.2.1. Tétel bizonyítása [7] alapján. Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Vezessük be a következő jelöléseket: $|V(G)| = n$, $OPT(G)$ a barátságos csúcsok maximális száma egy (S) kiegyensúlyozott partícióban és $t = |\{v \in V(G) : d(v) = n-1\}|$, azaz azon csúcsok száma, melyek foka $n-1$.

Ekkor $OPT(G) \leq n - t$. Felhasználva az 5.2.3. Tételt polinom időben hozzájutunk egy olyan bipartícióhoz, ahol a barátságos csúcsok száma $f(G, S) \geq \lceil \frac{n-t}{3} \rceil \geq \frac{OPT(G)}{3}$. □

Érdekességként megjegyezzük, hogy a Maximálisan barátságtalan bipartíció problémára is adható konstans approximáció.

5.2.4. Tétel [7]. *A* Maximálisan barátságtalan bipartíció *probléma* 2*-approximálható.*

A [48]-ban a Maximálisan barátságos bipartíció problémára adott 2-approximáció lényegesen bonyolultabb a fent közöltnél, így annak bizonyítását nem közöljük, de megjegyezzük, hogy igazából a Maximálisan erősen barátságtalan bipartíció problémára adnak 2-approximáló algoritmust. Majd ezt a komplementer gráfra alkalmazva állítják elő a Maximálisan barátságos bipartíció probléma 2-approximációját.

Maximálisan erősen barátságtalan bipartíció (Max strong co-satisfying bisection problem)

Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van.

Output: Adjunk meg V-nek (V_1, V_2) olyan nemtriviális felbontását, hogy $|V_1| = |V_2|$ és maximalizálja az erősen barátságtalan csúcsok számát.

5.2.5. Tétel [48]**.** *A* Maximálisan barátságos bipartíció *probléma* 2*-approximálható.*

A kérdés nyitott, azaz nem tudni, hogy létezik-e valamilyen $c < 2$-re c-approximációja a fent tárgyalt problémáknak.

6. fejezet

(a,b)-partíciók

Már a legelső részben is láttuk, hogy a barátságos gráfok problémakörének rengeteg változata ismert. A barátságos partíciók keresése mellett megismerkedtünk a p-barátságos halmaz, majd a q-barátságos partíció fogalmával is. Ebben a fejezetben pedig az (a, b)-partíciókat vezetjük be, melyek az eddigieknél mind általánosabbak, hiszen itt minden csúcsra külön-külön írhatunk elő feltételeket.

Stiebitz 1996-os cikke óta több publikáció jelent meg. A definíciók és fontosabb változatok bemutatása után közöljük a témában megjelent eredményeket, de ezek bonyolultsága és főleg hosszúsága miatt a bizonyításokat elhagyjuk.

6.1. Definíciók, változatok

6.1.1. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények és V-nek egy nemtriviális (A, B) partíciója az alábbi feltételekkel:

$$\forall u \in A \;\; d_A(u) \geq a(u) \text{ és } \forall v \in B \;\; d_B(v) \geq b(v),$$

akkor ezt (a, b)-partíciónak nevezzük.

(a,b)-PARTÍCIÓ
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf és $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények.
Kérdés: Létezik-e G-nek (a, b)-partíciója?

6.1.2. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a barátságos partíció egy speciális esete az (a, b)-partíciónak. Legyen minden $v \in A$ csúcsra $a(u) = \frac{d(u)}{2}$ és minden $v \in B$ csúcsra

$b(v) = \frac{d(v)}{2}$. Ekkor ha létezik a gráfnak (a, b)-partíciója, úgy pont egy barátságos partíciót kapunk.

6.1.3. Megjegyzés. Sőt, a q-barátságos partícióknak is egy általánosításáról van szó. Emlékeztetőül, V egy (A, B) partícióját q**-barátságosnak** nevezzük valamilyen $q \in (0, 1)$ esetén, ha minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq qd(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $d_B(v) \geq (1 - q)d(v)$. Hiszen legyen minden $u \in A$ csúcs esetén $a(u) = qd(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $b(v) = (1 - q)d(v)$. Ekkor ha létezik a gráfnak (a, b)-partíciója, úgy pont egy q-barátságos partíciót kapunk.

[8]-ban vezetik be a t-(a, b)-partíció fogalmát, mely egy olyan (a, b)-partíció, amelynél az egyik csúcshalmaz mérete a gráf csúcsszámának t-szeresével egyenlő.

Ennek speciális esete lesz az (a, b)-bipartíció, ahol a szokásos feltételek mellett a $|V_1| = |V_2|$ teljesülését követeljük meg.

6.1.4. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények, melyekre teljesül, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra $a(v), b(v) \leq d(v)$, valamint V-nek egy nemtriviális (A, B) partíciója az alábbi feltételekkel:

$$\forall u \in A \;\; d_A(u) \geq a(u) \text{ és } \forall v \in B \;\; d_B(v) \geq b(v) \text{ és } |V_1| = t(|V|),$$

akkor ezt t-(a, b)-partíciónak nevezzük.

t-(a,b)-PARTÍCIÓ
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf, $t \in \mathbb{R}$ és $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények, melyekre teljesül, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra $a(v), b(v) \leq d(v)$.
Kérdés: Létezik-e G-nek t-(a, b)-partíciója?

6.1.5. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, melynek páros sok csúcsa van, $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények, melyekre teljesül, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $a(v), b(v) \leq d(v)$ és V-nek egy nemtriviális (A, B) partíciója az alábbi feltételekkel:

$$\forall u \in A \;\; d_A(u) \geq a(u) \text{ és } \forall v \in B \;\; d_B(v) \geq b(v) \text{ és } |V_1| = |V_2|,$$

akkor ezt (a, b)-bipartíciónak nevezzük.

(a,b)-BIPARTÍCIÓ
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf és $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények, melyekre teljesül, hogy minden

$v \in V(G)$ csúcs esetén $a(v), b(v) \leq d(v)$.
Kérdés: Létezik-e G-nek (a, b)-bipartíciója?

Persze előfordulhat, hogy egy gráfban nem létezik (a, b)-partíció vagy t-(a, b)-partíció. Ekkor érdekes optimalizálási kérdés lehet megadni a gráfnak egy olyan partícióját, mely habár nem $(t$-$)(a, b)$-partíció, de a lehető legtöbb csúcsára teljesülnek az előírt fokszámfeltételek. Ez motiválja a következő problémákat.

Maximális (a,b)-partíció (Max satisfying decomposition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf és $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények.
Output: Adjunk meg $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A, B)-partícióját, hogy maximális legyen azon csúcsok száma, melyekre teljesül, hogyha $u \in A$, akkor $d_A(u) \geq a(u)$ és ha $v \in B$, akkor $d_B(v) \geq b(v)$.

Maximális t-(a,b)-partíció (Max satisfying t-decomposition)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf és $a, b : V \to \mathbb{N}$ függvények.
Output: Adjunk meg $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A, B)-partícióját, hogy $|V_1| = t(|V|)$ és maximális legyen azon csúcsok száma, melyekre teljesül, hogyha $u \in A$, akkor $d_A(u) \geq a(u)$ és ha $v \in B$, akkor $d_B(v) \geq b(v)$.

Természetesen az (a, b)-partíciók fogalmát is általánosíthatjuk abba az irányba, hogy nem csak két részre bontjuk a csúcsok halmazát, hanem k darabra, és így persze mindegyikhez külön függvény mondja meg, hogy az ottani csúcsoknak milyen fokszámkritériumokat kell kielégíteniük.

6.1.6. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, $f_1, \ldots, f_k : V \to \mathbb{N}$ függvények és V-nek k nemüres részhalmazból álló $(V_1, \ldots, V_k)$ partíciója az alábbi feltételekkel:

$$\forall v \in V_i, \quad \forall\, 1 \leq i \leq k : \quad d_{V_i}(v) \geq f_i(v),$$

akkor ezt $(f_1, \ldots, f_k)$-partíciónak nevezzük.

$(f_1, \ldots, f_k)$-partíció
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf és $f_1, \ldots, f_k : V \to \mathbb{N}$ függvények.
Kérdés: Létezik-e G-nek $(f_1, \ldots, f_k)$-partíciója?

6.2. Eredmények

Láttuk, hogy az (a,b)-PARTÍCIÓ általánosabb, mint a BARÁTSÁGOS PARTÍCIÓ problémája, így természetesen ez is NP-teljes. Ezért itt is csak abban reménykedhetünk, hogy speciális gráfosztályok esetén sikerül megfogalmazni elégséges feltételt az (a,b)-partíció létezésére.

Az alábbi tételek közül hármat az eredeti cikkekben [18,35,52] gyengébb alakban láttak be (csak a minimális fokszámú csúcsra követelték meg az egyenlőtlenség teljesülését), de [28]-ban bebizonyították, hogy az itt közölt állítások is igazak.

6.2.1. Tétel [52]**.** *Legyen G gráf, és $a,b : V(G) \to \mathbb{N}$ két olyan függvény, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq a(v) + b(v) + 1$. Ekkor létezik $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A,B) partíciója, hogy minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq a(u)$ és minden $v \in B d_B(v) \geq b(v)$.*

6.2.2. Tétel [35]**.** *Legyen G gráf, és $a,b : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ két olyan függvény, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq a(v) + b(v)$. Ha G C_3-mentes, akkor létezik $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A,B) partíciója, hogy minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq a(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $d_B(v) \geq b(v)$.*

6.2.3. Tétel [18]**.** *Legyen G gráf, és $a,b : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ két olyan függvény, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq a(v) + b(v) - 1$. Ha G C_3-mentes és C_4-mentes, akkor létezik $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A,B) partíciója, hogy minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq a(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $d_B(v) \geq b(v)$.*

Az előbbi tételnek látták be az erősebb alakját 2017-ben, amikor is megmutatták, hogy elég a C_4-mentességet feltenni, mert már ebből is következik a szokásos fokszámkritérium mellett, hogy a gráfnak lesz (a,b)-partíciója.

6.2.4. Tétel [41]**.** *Legyen G gráf, és $a,b : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ két olyan függvény, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq a(v)+b(v)-1$. Ha G C_4-mentes, akkor létezik $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A,B) partíciója, hogy minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq a(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $d_B(v) \geq b(v)$.*

A [18, 35, 52]-beli tételek eredeti bizonyításai nem konstruktívak. [10]-ben látják be, hogy mindegyik feltétel elegendő ahhoz, hogy polinom időben megtaláljunk egy (a,b)-

partíciót. Továbbá ebben a cikkben adnak egy elégséges feltételt az $(f_1, \ldots, f_k)$-partíció polinom időben történő megkeresésére.

6.2.5. Tétel [10]. *Legyen adott egy G gráf, egy $k \geq 2$ egész szám és $f_1, \ldots, f_k : V(G) \to \mathbb{N}$ függvények úgy, hogy minden $v \in V(G) : d(v) \geq f_1(v) + \ldots + f_k(v) + k - 1$. Ekkor polinom időben megadható egy $(f_1, \ldots, f_k)$-partíció.*

6.2.6. Tétel [10]. *Legyen adott egy háromszögmentes G gráf, egy $k \geq 2$ egész szám és $f_1, \ldots, f_k : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ függvények úgy, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq f_1(v) + \ldots + f_k(v)$. Ekkor polinom időben megadható egy $(f_1, \ldots, f_k)$-partíció.*

6.2.7. Tétel [10]. *Legyen adott egy G gráf, melynek átmérője legalább 5, egy $k \geq 2$ egész szám és $f_1, \ldots, f_k : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ függvények úgy, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq f_1(v) + \ldots + f_k(v) - k + 1$. Ekkor polinom időben megadható egy $(f_1, \ldots, f_k)$-partíció.*

[40]-ben további elégséges feltételeket adtak az (a, b)-partíció létezésére.

6.2.8. Tétel [40]. *Legyen G legalább 4 csúcsú gráf, és $a, b : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ két olyan függvény, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq a(v) + b(v)$. Ha G $(K_4 - e)$-mentes, akkor létezik $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A, B) partíciója, hogy minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq a(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $d_B(v) \geq b(v)$.*

6.2.9. Tétel [40]. *Legyen G gráf és $a, b : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ két olyan függvény, hogy minden $v \in V(G)$ csúcs esetén $d(v) \geq a(v) + b(v) - 1$. Ha G C_3-mentes és olyan, hogy bármely két négyszög éldiszjunkt, akkor létezik $V(G)$-nek olyan nemtriviális (A, B) partíciója, hogy minden $u \in A$ csúcs esetén $d_A(u) \geq a(u)$ és minden $v \in B$ csúcs esetén $d_B(v) \geq b(v)$.*

A legfrissebb (2018-as) eredmény bonyolultsággal foglalkozik: belátja, hogy az (a, b)-partíciók egyik speciális alosztálya is NP-teljes. [4]-ben bebizonyítják, hogyha $i = 1, 2$-re $4 \leq k_1 + k_2$ teljesül, akkor NPC-beli, hogy a gráf csúcsinak van-e olyan (A, B) partíciója, melyekre $k_1 \leq \delta(G[A])$ és $k_2 \leq \delta(G[B])$.

6.2.10. Tétel [4]. *Legyenek $1 \leq k_1 \leq k_2$ egész számok. Ha $k_1 + k_2 \leq 3$, akkor polinom időben eldönthető, hogy létezik-e a gráf csúcsinak olyan (A, B) partíciója, melyekre $k_1 \leq \delta(G[A])$ és $k_2 \leq \delta(G[B])$. k_1, k_2 minden más értékére NP-teljes eldönteni, hogy* *létezik-e ilyen partíció.*

Csak érdekességként jegyezzük meg, hogy [8]-ban belátták: van olyan speciális eset, hogy az (a,b)-PARTÍCIÓ és a t-(a,b)-PARTÍCIÓ probléma polinom időben eldönthető. Továbbá ugyan csak polinom időben megadható egy optimális megoldása a MAXIMÁLIS (a,b)-PARTÍCIÓ és a MAXIMÁLIS t-(a,b)-PARTÍCIÓ problémáknak, illetve az utóbbi kettőnek létezik polinom idejű approximációs sémája a síkgráfokra.

7. fejezet

Alkalmazások, kapcsolatok más gráfelméleti fogalmakkal

A barátságos partícióknak rengeteg alkalmazása ismert. Egyrészt sok matematikai problémában felhasználják, mint például az általa generált változatok vizgálatában, vagy gráfokban lévő szövetségek [32, 37] leírásához. Kapcsolatba hozható bizonyos optimális bináris kódokkal is [29]. Másrészt pedig a gyakorlati életben is jelentős szerepet tölt be. Felhasználható a szociális [20] és biológiai [33, 50] hálózatokban, az internet [22, 23], mérnöki modellek [30, 31, 34] vizsgálatánál, vagy éppen egy társaság két részre bontásánál [27].

Ebben a fejezetben két, a barátságos partícióhoz nagyon közel álló témával ismerkedünk meg: a szövetségekkel és a független vágásokkal.

7.1. Szövetségek a gráfokban

A barátságos partíciók változatainál már megemlítettük a szövetségeket (alliance). Most részletesebben foglalkozunk velük, ezért előtte emlékeztetőül álljon itt a definíciójuk.

7.1.1. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy

$$d_S(v) \geq d_{V \setminus S}(v) - 1 \;\; \forall v \in S,$$

akkor S-t védekező szövetségnek (defensive alliance) nevezzük.

7.1.2. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy

$$d_S(v) \geq d_{V\setminus S}(v) \;\; \forall v \in S,$$

akkor S-t erősen védekező szövetségnek (strong defensive alliance) nevezzük.

Látható, hogy ha létezik V-nek egy nemtriviális (V_1, V_2) partíciója, melyre V_1 és V_2 is erősen védekező szövetség, akkor a (V_1, V_2) felbontás egyben barátságos partíció is lesz.

Tekintsünk egy már kevésbé aktuális, de szemléletes példát. A védekező szövetséget úgy is elképzelhetjük, hogy tekintünk néhány várost, akik között vagy van út (ekkor fut él a két várost reprezentáló csúcs között), vagy nincs (ekkor nem fut él). (Nyilvánvaló, hogy a kettő állapot közül pontosan az egyik teljesül bármely két városra.) Minden városnak önálló hadserege van, de ezek létszáma a települések hasonló anyagi helyzete miatt egyenlő. A seregek csak az utakon tudnak közlekedni. A városok katonái időnként megtámadják egymást, de egymással semmilyen írásos egyezményt sem kötnek. A városok között kialakulhat olyan (rész)csoport, melyben teljesül, hogy bármely tagjának több „szövetségese", azaz szomszédja van a csoporton belül, mint kívül. Ez egy felettébb előnyös szituáció a csoport (= védekező szövetség) tagjainak, hiszen nem kell tartaniuk a halmazon kívüli szomszédoktól, ugyanis egymást megvédve minden védekező szövetségen belüli város megmenekülhet egy esetleges támadástól.

Érdekes továbbgondolása a problémának, ha feltesszük, hogy a városok eltérő haderővel rendelkeznek. Ez azt szemlélteti, hogy egy település milyen mértékben tud segíteni egy szomszédjának, amennyiben azt megtámadják kívülről. További lehetőség, hogy az élekhez súlyokat rendelünk, hogy a távolságokat és az esetleges eltérő útviszonyokat is figyelembe kelljen venniük csatázó hőseinknek.

Ez a példa nem csak városok közötti harcokra, hanem cégekre, más szervezetekre, országokra és emberekre is vonatkoztatható.

Természetesen ahogyan az életünk folyamán találkozhatunk támadó jellegű csoportokkal, úgy a matematikában is létezik erre definíció.

Egy $G = (V, E)$ gráfban egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmazból elérhető csúcsok halmazát $\partial(S)$-sel jelöljük, azaz

$$\partial(S) = \{v \in V \setminus S : \;\; \exists\, s \in S, \;\text{hogy}\;\; (s, v) \in E(G)\}.$$

7.1.3. Definíció. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy nemüres $S \subseteq V$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy

$$d_S(v) \geq d_{V \setminus S}(v) + 1 \ \ \forall v \in \partial(S),$$

akkor S-t támadó szövetségnek (offensive alliance) nevezzük.

Azaz egy ilyen csoport megtámadhatja a $\partial(S)$ elemeit, hiszen azoknak több szomszédja van S-ben, mint S-en kívül, így könnyen legyőzhetők.

7.2. Független vágások

Már többször utaltunk rá, hogy hasznos a barátságos partíciók keresésénél, ha tudjuk, hogy egy gráfban létezik független vágás (matching cutset). Ebben a részben nagyon röviden összegyűjtjük, hogy mely gráfosztályokban tudunk polinom időben ilyen élhalmazt keresni, illetve melyekben NP-teljes a feladat. Természetesen a második esetben is van remény a particionálhatóságra, de ekkor más módszerekhez kell folyamodnunk.

FÜGGETLEN VÁGÁS (Matching cutset)
Input: Egy $G = (V, E)$ gráf.
Kérdés: Létezik-e V-ben olyan $C \subset E(G)$, hogy C vágás és párosítás egyszerre?

A FÜGGETLEN VÁGÁS probléma általában [17] és számos más esetben is NP-teljes. Ezen gráfosztályok közül néhány egyszerűbbet közlünk csak:

- $\Delta(G) = 4$ [17],
- G síkgráf és $\Delta(G) = 4$ [13],
- G átmérője 4 [38],
- G páros gráf és átmérője 5 [38],
- G síkgráf és kerülete 5 [13].

A sok nehéz eset mellett akadnak olyan gráfosztályok is, melyekben a FÜGGETLEN VÁGÁS probléma polinom időben megoldható. A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhányat:

- G $(K_{1,4}, K_{1,4} + e)$-mentes gráf [36],
- $\Delta(G) \leq 3$ [17],

- G élgráf [44],
- G olyan gráf, melyben nincs legalább 5 hosszú átló nélküli kör [44],
- G páros gráf és legfeljebb 3 az átmérője [38].

[14]-ben egy nagyon bő és részletes tárgyalása található meg a témának, mely nem csak a Független vágás problémát vizsgálja, hanem a vele kapcsolatos fogalmakat is. Az érdeklődőknek ajánljuk még a stabil ponthalmaz (stable cutset) témakört, mivel ezen két probléma szoros kapcsolatban áll egymással. Erről bővebben [15, 43, 47] cikkekben található információ.

8. fejezet

Nyitott kérdések

Láthattuk, hogy a barátságos partícióknak számtalan változata ismert, így nem meglepő, hogy rengeteg kérdés tehető fel, melyekről még semmit sem tudunk. Jó néhány cikkben fogalmaznak meg sejtéseket, de csak elszórtan érkeznek ezekre válaszok. Ebben a fejezetben igyekszünk lezárásként feltenni néhány érdekes kérdést, mely remélhetőleg gondolkodásra és kutatásra ösztönzi az Olvasót.

Az alábbiakban közölt problémák többnyire újak, valószínűleg eddig még nem vizsgálták őket nagyon részletesen. Nehézségük akár igen eltérő is lehet; témák szerint vannak csoportosítva.

8.1. Barátságos halmazok

Láttuk, hogy a barátságos partíciók létezésével ekvivalens két diszjunkt barátságos halmaz létezése. Érdemes lenne jobban megvizsgálni, hogy milyen feltételei vannak ilyen halmazok létezésének, illetve ennek a problémának mi a bonyolultsága. Vegyük észre, hogy ha a barátságos halmazokra, mint a gráf csúcsain értelmezett halmazrendszerre gondolunk, akkor unió-zárt halmazrendszert alkotnak. Előfordulhat, hogy találunk egy barátságos halmazt, de ettől diszjunkt már nincs a gráfban. Habár egy ilyen „elrontja" a barátságos partíció keresését (könnyű látni, hogy a bevett csúcsok egyesével történő megvizsgálása, majd mohó kidobása nem vezet érdemi eredményre), azért szép lenne megadni egy ilyen tulajdonságú és ráadásul minimális elemszámú barátságos halmazt, azaz egy olyan barátságos halmazt, amely minden más barátságos halmazt metsz.

1979 óta megoldatlan probléma a Frankl-sejtés [25], miszerint egy unió-zárt halmazrendszernek van olyan eleme, amely legalább a halmazok felében benne van. Néhány érdekes speciális esetet már megvizsgáltak [16, 19, 21, 49], de meg lehetne vizsgálni a sejtést a barátságos halmazok által alkotott halmazrendszerre.

Ha a válasz igen, akkor joggal merül fel a kérdés, hogy hogyan lehet megtalálni ezt a csúcsot. Ennek a duálisa is elgondolkodtató, azaz hogy vannak-e olyan csúcsok a gráfban, amelyek az egész gráfot leszámítva egyetlen barátságos halmazban sem szerepelnek. Ebből persze következne, hogy a gráf nem particionálható.

A 3.2.6. Definícióban szereplő legkisebb barátságos halmaz elemszámára láttunk egy felső korlátot, de hasznos lenne gyorsan megtalálni egy ilyet. Illetve adódik a kérdés, hogy rögzített G gráf esetén milyen $X \subset V(G)$-re lesz X egyszerre lokálisan minimális és lokálisan maximális is.

8.2. Barátságos partíciók

Néhány speciális gráfosztály, melyekről érdemes lenne kideríteni, hogy mikor particionálhatók: síkgráfok, erősen reguláris gráfok, outerplanar gráfok.

Habár NP-teljes eldönteni, hogy létezik-e barátságos partíciója, de felmerül a kérdés, hogy ha tudjuk, hogy létezik, akkor tudunk-e többet is találni? Ilyenkor a második megkeresésének mi a bonyolultsága? Van-e valamilyen karakterizációjuk azoknak a gráfoknak, melyeknek pontosan egy barátságos partíciójuk van? Tudunk-e a meglévő segítségével speciális tulajdonságút (független vágás, lefogó élhalmaz, stb.) is találni? Mely gráfoknak van olyan felbontása, hogy a barátságos partíció egyben barátságtalan partíció is?

$2k$-reguláris gráfokban az a sejtés [51], hogy azon gráfok nem particionálhatók, melyeknek a komplementere nem összefüggő. Lehet-e szépen karakterizálni más gráfosztályokra a barátságos partíció nem-létezését?

Említettük a $(2k+1)$- és a $(2k+2)$-reguláris gráfok particionálhatóságának kapcsolatát. Fontos eredmény lenne, ha be tudnánk valamit bizonyítani a páratlan csúcsszámú esetről. Tudunk-e olyankor valamit állítani legalább a gyengén barátságos partíció létezéséről?

8.3. Barátságos partíciók változatai

Sokat vizsgált kérdés, hogy létezik-e barátságos bipartíció. A probléma egy másik változata is érdekes, vagyis hogy az $||A| - |B||$ különbség maximumáról mit tudunk mondani?

A Barátságos partíció probléma változatai között akad jó néhány, melyről csak annyi ismert, hogy általában NP-teljesek, holott nagyon természetes például az Átlagosan barátságos k-partíció probléma által felvetett kérdés. Érdemes lenne tehát megnézni, hogy a $k = 2$ esetén a particionálhatóságra vonatkozó ismert elégséges feltételek közül mik teljesülnek a $3 \leq k$ esetben. Konkrétan igaz-e, hogy egy gráfban pontosan akkor létezik átlagosan barátságos k-partíció, ha tartalmaz k, egymástól diszjunkt átlagosan barátságos részhalmazt. (Ahol az átlagosan barátságos részhalmaz adott k-ra a $k = 2$ esetén megismert definíció analógiájára történik, szokásosan felső egész rész használatával.)

Nyitott probléma, hogy milyen elégséges feltételei vannak a barátságos k-partícióknak. Speciálisan meg lehetne vizsgálni a $k = 3$ esetet, hogy vissza lehet-e vezetni valamely különleges gráfosztályok esetén a barátságos partíciókra.

Irodalomjegyzék

[1] R. András, S. Csaba, et al. *A számítástudomány alapjai.* Typotex Kft, 2002.

[2] S. Arumugam, A. Brandstädt, T. Nishizeki, et al. *Handbook of graph theory, combinatorial optimization, and algorithms*, volume 34. CRC Press, 2016.

[3] A. Ban and N. Linial. Internal partitions of regular graphs. *Journal of Graph Theory*, 83(1):5–18, 2016.

[4] J. Bang-Jensen and S. Bessy. Degree-constrained 2-partitions of graphs. *arXiv preprint arXiv:1801.06216*, 2018.

[5] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. Complexity of the satisfactory partition problem. *Algorithmic Discrete Mathematics Technical Report*, 34, 2003.

[6] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. On the existence and determination of satisfactory partitions in a graph. In *ISAAC*, pages 444–453. Springer, 2003.

[7] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. Complexity and approximation of satisfactory partition problems. *Lecture notes in computer science*, 3595:829, 2005.

[8] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. Degree-constrained decompositions of graphs: bounded treewidth and planarity. *Theoretical computer science*, 355(3):389–395, 2006.

[9] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. The satisfactory partition problem. *Discrete applied mathematics*, 154(8):1236–1245, 2006.

[10] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. Efficient algorithms for decomposing graphs under degree constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 155(8):979–988, 2007.

[11] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. Approximation of satisfactory bisection problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 74(5):875–883, 2008.

[12] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten. Satisfactory graph partition, variants, and generalizations. *European Journal of Operational Research*, 206(2):271–280, 2010.

[13] P. Bonsma. The complexity of the matching-cut problem for planar graphs and other graph classes. *Journal of graph theory*, 62(2):109–126, 2009.

[14] P. S. Bonsma. Sparse cuts, matching-cuts and leafy trees in graphs. 2006.

[15] A. Brandstädt, F. F. Dragan, T. Szymczak, et al. On stable cutsets in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 105(1-3):39–50, 2000.

[16] H. Bruhn and O. Schaudt. The journey of the union-closed sets conjecture. *Graphs and Combinatorics*, 31(6):2043–2074, 2015.

[17] V. Chvátal. Recognizing decomposable graphs. *Journal of Graph Theory*, 8(1):51–53, 1984.

[18] A. A. Diwan. Decomposing graphs with girth at least five under degree constraints. *Journal of Graph Theory*, 33(4):237–239, 2000.

[19] M. H. El-Zahar. A graph-theoretic version of the union-closed sets conjecture. *Journal of Graph Theory*, 26(3):155–163, 1997.

[20] A. M. Farley and A. Proskurowski. Networks immune to isolated line failures. *Networks*, 12(4):393–403, 1982.

[21] G. L. Faro. A note on the union-closed sets conjecture. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 57(2):230–236, 1994.

[22] G. W. Flake, S. Lawrence, and C. L. Giles. Efficient identification of web communities. In *Proceedings of the sixth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pages 150–160. ACM, 2000.

[23] G. W. Flake, R. E. Tarjan, and K. Tsioutsiouliklis. Graph clustering and minimum cut trees. *Internet Mathematics*, 1(4):385–408, 2004.

[24] A. Frank. *Connections in combinatorial optimization*, volume 38. OUP Oxford, 2011.

[25] P. Frankl. Extremal set systems. In *Handbook of combinatorics (vol. 2)*, pages 1293–1329. MIT Press, 1996.

[26] M. Gerber and D. Kobler. Partitioning a graph to satisfy all vertices. *Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne*, 1998.

[27] M. U. Gerber and D. Kobler. Algorithmic approach to the satisfactory graph partitioning problem. *European Journal of Operational Research*, 125(2):283–291, 2000.

[28] M. U. Gerber and D. Kobler. Classes of graphs that can be partitioned to satisfy all their vertices. *Australasian Journal of Combinatorics*, 29:201–214, 2004.

[29] R. L. Graham. On primitive graphs and optimal vertex assignments. *Annals of the New York academy of sciences*, 175(1):170–186, 1970.

[30] K. Hangos and Z. Tuza. Optimal control structure selection for process systems. *Computers & Chemical Engineering*, 25(11):1521–1536, 2001.

[31] K. M. Hangos, Z. Tuza, and A. Yeo. Some complexity problems on single input double output controllers. *Discrete Applied Mathematics*, 157(5):1146–1158, 2009.

[32] K. Hassan-Shafique. Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering. 2004.

[33] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. In *Spin Glass Theory and Beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications*, pages 411–415. World Scientific, 1987.

[34] T. Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[35] A. Kaneko. On decomposition of triangle-free graphs under degree constraints. *Journal of Graph Theory*, 27(1):7–9, 1998.

[36] D. Kratsch and V. B. Le. Algorithms solving the matching cut problem. *Theoretical Computer Science*, 609(P2):328–335, 2016.

[37] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi. Alliances in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 48:157–178, 2004.

[38] H.-O. Le and V. B. Le. On the complexity of matching cut in graphs of fixed diameter. In *LIPIcs-Leibniz International Proceedings in Informatics*, volume 64. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016.

[39] N. Linial and S. Louis. Asymptotically almost every $2r$-regular graph has an internal partition. *arXiv preprint arXiv:1708.04162*, 2017.

[40] M. Liu and B. Xu. On partitions of graphs under degree constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 226:87–93, 2017.

[41] J. Ma and T. Yang. Decomposing c_4-free graphs under degree constraints. *arXiv preprint arXiv:1706.07292*, 2017.

[42] R. G. Michael and S. J. David. Computers and intractability: a guide to the theory of np-completeness. *WH Free. Co., San Fr*, pages 90–91, 1979.

[43] R. Mosca, H. Müller, et al. On stable cutsets in claw-free graphs and planar graphs. *Journal of Discrete Algorithms*, 6(2):256–276, 2008.

[44] A. M. Moshi. Matching cutsets in graphs. *Journal of Graph Theory*, 13(5):527–536, 1989.

[45] J. Petersen. Die theorie der regulären graphs. *Acta Mathematica*, 15(1):193, 1891.

[46] E. Petrank. The hardness of approximation: Gap location. *Computational Complexity*, 4(2):133–157, 1994.

[47] B. Randerath et al. On stable cutsets in line graphs. *Theoretical Computer Science*, 301(1-3):463–475, 2003.

[48] B. Ries and R. Zenklusen. A 2-approximation for the maximum satisfying bisection problem. *European Journal of Operational Research*, 210(2):169–175, 2011.

[49] I. T. Roberts and J. Simpson. A note on the union-closed sets conjecture. *Australasian Journal of Combinatorics*, 47:265–267, 2010.

[50] A. A. Schäffer. Simple local search problems that are hard to solve. *SIAM journal on Computing*, 20(1):56–87, 1991.

[51] K. H. Shafique and R. D. Dutton. On satisfactory partitioning of graphs. *Congressus Numerantium*, pages 183–194, 2002.

[52] M. Stiebitz. Decomposing graphs under degree constraints. *Journal of Graph Theory*, 23(3):321–324, 1996.

[53] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A course in combinatorics.* Cambridge university press, 2001.

[54] V. V. Vazirani. *Approximation algorithms.* Springer Science & Business Media, 2013.