

III. MAT. TANÁRI SZAK

Analízis Szigorlati Tételek részletes anyaga

2005/06 I. félév

Legutolsó módosítás ideje: 2005. november 7. (Előfordulhat, hogy a tételjegyzéken hallgatói kérdések hatására a vizsgaidőszak kezdetéig további apró pontosításokat is végrehajtok.)

E jegyzéket a szigorlaton nem szabad használni, csak tájékoztatásra szolgál, a felkészülést hivatott elősegíteni. A vizsgatételjegyzéken csak a **vastagon szedett** tételcímek szerepelnek.

1. Halmazelméleti, logikai, kombinatorikai alapfogalmak.

(Logikai műveletek: és, vagy, tagadás, implikáció, ekvivalencia, kvantorok használata. Indirekt bizonyítás és teljes indukció, példákkal. Egyenlőtlenségek (közepek, Bernoulli). Halmazelméleti alapfogalmak. Kombinatorikai alapfogalmak. Elemi leszámolási feladatok: permutáció; ismétléses, ismétlés nélküli variáció; ismétléses, ismétlés nélküli kombináció. Binomiális tétel. Pascal háromszög. $\binom{n}{k}$ elemi tulajdonságai.)

2. Valós számok.

(Mit jelent a konstruktív megalapozás? Az axiomatikus megalapozás eleje. A testaxiómák és az ezekkel kapcsolatos tételek. A rendezési axiómák és közvetlen következményeik. Korlátossággal kapcsolatos definíciók és a teljességi axióma. Az Arkhimédész és a Cantor-féle tulajdonság ekvivalenciája a teljességi axiómával. \mathbb{Q} , valamint $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sűrű. $\sqrt[k]{a}$ definíciója, tizedes törtek.)

3. Számsorozatok határértéke.

(A határérték definíciója, ennek ekvivalens átfogalmazása, a határérték egyértelmősége. Konvergens sorozat egymást követő tagjainak különbségéből képzett sorozat viselkedése, részsorozatok definíciója. Konvergens sorozatok részsorozatai. Egyenlőtlenségek és határátmenet. Konvergencia és korlátosság. Végtelen határérték. Sorozatok átrendezése és véges módosításai. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. A határérték tulajdonságai. Rendőr elv. Sorozatok összege, szorzata, hányadosa. Végtelen határérték és alpműveletek, kritikus határértékek. Bolzano–Weierstrass tétel. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Cauchy kritérium sorozatokra. Sorozatok limesz superiora és limesz inferiora.)

4. Végtelen sorok.

(Végtelen sorok definíciója és elemi konvergencia tulajdonságai. Nemnegatív tagú sorok konvergencia tulajdonságai. Gyök- és Hányadoskritérium. Leibniz típusú sorok. Integrálkritérium.)

5. Elemi függvények.

(Függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak. Az a^x definíciója és tulajdonságai. Az a^x határértéke, értékkészlete. $\log_a(x)$ definíciója és tulajdonságai. Trigonometrikus függvények definíciója, a $\sin x$ és a $\cos x$ elemi tulajdonságai. A trigonometrikus függvények és inverzeik folytonossága, ábrái. (Az arkuszfüggvények definícióját is adjuk meg.) Hiperbolikus függvények és inverzeik.)

6. Függvények határértéke, folytonossága.

(Valós függvények. Lokális és globális tulajdonságok. Függvények határértéke és ennek különböző esetei. A határérték tulajdonságai. Függvények folytonossága. Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények. Inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel. Monoton függvény folytonossági pontjai.)

7. Differenciálszámítás.

(Az $f'(a)$ definíciója, és a definíció közvetlen következményei. Differenciálási szabályok. Közvetett függvény differenciálási szabálya. Inverz függvény differenciálási szabálya. Trigonometrikus függvények deriváltjai. A logaritmusfüggvény deriváltja.)

8. A Differenciálszámítás alkalmazásai.

(A differenciálhatóság és a lokális növekedés kapcsolata. Középértéktételek. A L'Hospital féle szabály. Monotonitási feltételek. Szélsőérték-feladatok. Magasabb rendű deriváltak. Konvexitás definíciója, ekvivalens tul., konv. fv. folytonossága, féloldali deriváltak létezése. Konvexitás karakterizálása deriváltak segítségével. Inflexiós pontok. Teljes függvényvizsgálat. A Jensen-egyenlőtlenség és következményei.)

9. A határozott integrál.

(A Riemann-integrál definíciója. Felosztások finomításai, egyenlőtlenség a Darboux-féle alsó és felső integrálok között. Az integrálhatósággal ekvivalens tulajdonságok, integrálközelítő összegek. Integrálhatóságra vonatkozó elégséges feltételek, egyenletes folytonosság. Az integrál elemi tulajdonságai: részintervallumon való integrálhatóság, csatlakozó intervallumok, egyenlőtlenségek, linearitás, "[$a + \delta, b$]"-s tétel és következményei. Közvetett függvény, szorzat és hányados integrálhatósága. Improprius integrál. Paraméteres integrálok folytonossága.)

10. A határozatlan integrál.

(A Newton—Leibniz-szabály. Primitív függvények és integrálfüggvények. A Riemann-integrállal kapcsolatos függvényosztályok és ezek viszonya. A határozatlan integrálok kiszámítása: alapintegrálok, $\int cf$, $\int f + g$, $\int f(ax + b)dx$, $\int f^\alpha f'$, $\int f'/f$, parciális integrálás, helyettesítéssel való integrálás, adjunk példákat is. Racionális törtfüggvények, (elemi racionális törtfüggvények és ezek integrálása). A parciális törtekre való felbontás létezésére vonatkozó tétel. A parciális törtekbontás technikája. Racionalizáló helyettesítések.)

11. Az integrálszámítás alkalmazásai.

(A Wallis és a Stirling formula. Területszámítás: Vázlatosan a terület fogalma, görbe alatti terület, körszelet területe, körcikk területe, szektorszerű tartomány területe. Forgástestek térfogata. Forgástestek felszíne.)

12. Függvénysorozatok és függvénysorok.

(Definíciók, egyenletes konvergencia, példák, Cauchy-kritérium, Weierstrass-kritérium. Határátmenet és egyenletes konvergencia. Integrálás és egyenletes konvergencia. Differenciálás és egyenletes konvergencia. Hatványsorok: definíciók, konv. sugár, integrálhatóság és differenciálhatóság. Taylor-sorok.)

13. Metrikus terek.

(Definíciók, normák \mathbb{R}^n -ben, $C[a, b]$ -ben, $B(a, \delta)$. Nyílt és zárt halmazok metrikus terekben, $int(H)$, $ext(H)$, $mar(H)$, konvergens pont és Cauchy-sorozatok \mathbb{R}^n -ben. Bolzano-Weierstrass tétel \mathbb{R}^n -ben. \mathbb{R}^n -beli zárttság karkarakterizálása sorozatok segítségével. Kompakt halmazok \mathbb{R}^n -ben. Heine–Borel tétel. Metrikus terek közötti folytonos leképezések elemi tulajdonságai. Kompakt \mathbb{R}^n -beli halmazokon folytonos függvények tulajdonságai. Kontrakciók. Fixponttételek (gyenge kontrakció és Banach). Torlódási és izolált pontok. Leképezések határértéke. $C[a, b]$ teljes.)

14. Differenciálegyenletek.

(Bevezetés, geometriai jelentés, $y' = ky$ alakú egyenlet megoldása, explicit közönséges elsőrendű d.e. fogalma. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Szeparábilis differenciálegyenletek. Szeparábilis egyenletre visszavezethető differenciálegyenletek $y' = f(x + y)$ és $y' = f(y/x)$ (Példák!).

Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek. Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek. Állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek. Rezgőmozgás és csillapított rezgés. Picard-Lindelöf tétel. Közöséges elsőrendű explicit differenciálegyenletrendszerek és magasabb rendű egyenletek.)

15. A többváltozós integrálszámítás elemei.

(Téglák és elemi alakzatok. Jordan-féle terület és térfogat. A térfogati integrál definíciója, integrálközelítő és oszcillációs összegek. A térfogati integrál elemi tulajdonságai. Területi integrál átalakítása kétszeres integrállá. Lebontási tétel. Integrálás normáltartományon. Lebontási tétel magasabb dimenzióban. Cavalieri elv. A térfogati integrál alkalmazásai.)