

Analízis vizsgadolgozat minta

(Ezt a mintát részben a korábbi tanévek vizsgadolgozataiból állítottam össze. Az idén is hasonló stílusú, de részleteiben eltérő vizsgadolgozatok lesznek.)

## II. mat. tanár analízis vizsgadolgozat-minta

A dolgozat megírására 120 perc áll rendelkezésre. Semmilyen segédeszköz nem használható. Minden feladat megoldását **külön lapra** kell írni. A válaszokat **indokolni** kell. Indoklás nélküli válaszokra nem jár pont. Az előadáson elhangzott tételekre bizonyítás nélkül lehet hivatkozni, kivéve ha a tétel bizonyítása a kérdés.

### 1. feladat

(a) Definiálja a metrikus teret! (3 pont)

(b) Metrika-e a síkon  $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ , ahol  $(x_1, y_1)$  és  $(x_2, y_2)$  a sík pontjai? (1 pont)

(c) Mondja ki a függvények folytonosságára vonatkozó átviteli elvet metrikus terekben! (2 pont)

(d) Definiálja egy  $\mathbf{R}^n$ -beli halmaz belső, külső és határpontját! (3 pont)

(e) Definiálja az (erős) kontrakciót metrikus terekben! (1 pont)

(f) Mondja ki Banach fixpont-tételét! (2 pont)

(g) Írja fel a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletét! (1 pont)

(h) Mondja ki a Picard-Lindelöf tételt! (2 pont)

### 2. feladat

(a) Határozza meg az  $y' = ky$  differenciálegyenlet összes megoldását! (Használja az előadáson tárgyalt közvetlen érvelést, szeparábilis, vagy lineáris egyenletek megoldóképletére való hivatkozás nem elegendő.) (5 pont)

(b) Oldja meg az  $y' = (x + y)^2$  differenciálegyenletet! (5 pont)

(c) Vezesse le a ferde gúla térfogatát megadó képletet térfogati integrálás segítségével! (5 pont)

### 3. feladat

Oldja meg az  $y' + y = e^{-x}$  differenciálegyenletet! (10 pont)

### 4. feladat

(a) Fogalmazza meg és bizonyítsa az  $\mathbb{R}^n$ -beli kompakt halmazok pontsorozatok segítségével történő karakterizációját megadó tételt. (10 pont)

(b) Fogalmazza meg és bizonyítsa a területi integrálra vonatkozó Lebontási tételt és a hozzá szükséges lemmát. (10 pont)