PÁROS HOSSZÚ KÖRÖK GRÁFOKBAN

CSIKVÁRI PÉTER

Kivonat. Ebben a jegyzetben bebizonyítjuk Bondy és Simonovits következő tételét. Ha egy n csúcsú egyszerű gráf nem tartalmaz C_{2k} kört akkor az éleinek száma legfeljebb $c_k n^{1+1/k}$.

1. Bevezetés

Ebben a jegyzetben minden gráf véges és egyszerű. Ha $G = (V, E)$ egy gráf, akkor $v(G) = |V(G)|$ és $e(G) = |E(G)|$ jelöli a G csúcsainak illetve éleinek a számát. A $H \subset G$ jelölés pedig azt jelenti, hogy H részgráfja G-nek (vigyázat nem feszített részgráfja). A C_n az n csúcsú kört jelöli. Ezen jegyzet célja az extremális gráfelmélet következő klasszikus tételének bizonyítása.

1.1. Tétel (Bondy-Simonovits)**.** [2] *Minden $k \geq 2$ egészre léteznek c_k és $n_0(k)$ konstansok, melyekre a következő teljesül. Legyen G_n egy n csúcsú gráf, melyre $n \geq n_0(k)$ és éleinek számára teljesül, hogy $e(G_n) \geq c_k n^{1+1/k}$. Ekkor $C_{2k} \subset G_n$.*

Ezen jegyzet Bondy és Simonovits eredeti cikkét követi [2]. Lényegében ugyanez a bizonyítás található meg Bollobás Béla: Extremal graph theory című könyvében [1]. Ez a könyv még mindig standard hivatkozási alap az extremális gráfelmélet területén noha egyes részeit jelentősen meghaladta a tudomány[1].

Ezen jegyzet a következőképpen épül fel. A következő részben kicsit feleleventíjük a C_4 kör esetét. Továbbá egy gyengébb, de egyszerűbb eredmény bizonyításával bemutatjuk a Bondy-Simonovits tétel bizonyításának fő gondolatát. Ezt azért csináljuk így, mert így egyszerűbb lesz látni, hogy a tétel bizonyításában mi a fő gondolat és mi az ami csak technikai nehézséget okoz. A harmadik részben bebizonyítjuk a Bondy-Simonovits tételt, valójában erősebbet fogunk bizonyítani, mint amit kimondtunk.

2. Visszatekintés és a bizonyítás fő gondolata

Alábbiakban először a C_4 esetével foglalkozunk. Ezt néhányan talán tanultátok elsőben, de nem árt feleleveníteni. Ennek a bizonyítása különbözik 1.1 tétel bizonyításától, de ennek a gondolatmenete is nagyon fontos, ez az ún. cseresznye leszámláláson alapul.

2.1. Tétel. *Legyen G_n egy n csúcsú gráf, mely nem tartalmaz 4 hosszú kört. Ekkor $e(G_n) \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$.*

[1]Ez nem nagy csoda, ugyanis a könyv 1978-ben íródott, így egyik nagy hiányossága, hogy a regularitási lemma egyáltalán nem szerepel benne.

Bizonyítás. Legyen G_n csúcsainak fokai $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Ekkor

$$2e(G_n) = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Számoljuk meg hány 2-hosszú út (azaz 3-csúcsú út, népszerűbb nevén cseresznye) van a gráfban. Legyen cs a cseresznyék száma. Ha a cseresznye középső csúcsa a gráf k. csúcsában van akkor a cseresznye két végét $\binom{d_k}{2}$ féleképpen választhatjuk ki. Tehát a cseresznyék száma

$$cs = \sum_{k=1}^{n} \binom{d_k}{2}.$$

A kritikus észrevétel az, hogy egy csúcspár legfeljebb egy cseresznyének lehet a két végpontja, ugyanis ha két cseresznyének is a végpontjai lennének akkor a két cseresznye középső csúcsaival együtt egy 4-hosszú kört kapnánk. Tehát minden csúcspár legfeljebb egy cseresznyének lehet a két végpontja, így legfeljebb $\binom{n}{2}$ cseresznye lehet. Tehát

$$\binom{n}{2} \geq cs = \sum_{k=1}^{n} \binom{d_k}{2}.$$

Először levezetünk egy alsó becslést a cseresznyék számára a pontos képletből.

$$cs = \sum_{k=1}^{n} \binom{d_k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d_k^2 - e(G_n) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right)^2 - e(G_n) = \frac{(2e(G_n))^2}{2n} - e(G_n) = \frac{2e(G_n)^2}{n} - e(G_n).$$

Tehát

$$\binom{n}{2} \geq \frac{2e(G_n)^2}{n} - e(G_n).$$

Ez azt jelenti, hogy $e(G_n)$ kisebb, mint a

$$\frac{2}{n}x^2 - x - \frac{n(n-1)}{2} = 0$$

másodfokú egyenlet nagyobbik gyöke, így

$$e(G_n) \leq x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{2}{n}\frac{n(n-1)}{2}}}{2\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right) \leq \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n}\right) = \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}.$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást. □

Az alábbi tétel bizonyítása megegyezik 1.1 tétel bizonyításának fő gondolatával.

2.2. Tétel. *Legyen G_n egy n csúcsú gráf, mely nem tartalmaz legfeljebb $2k$ hosszú kört. Ekkor $e(G_n) \leq n^{1+1/k} + n$.*

Bizonyítás. Legyen a G_n gráf legkisebb foka d és legyen x egy d-fokú csúcs. Építsünk x-ből egy szélességi keresőfát. (Nem biztos, hogy G összefüggő, így lehet, hogy ez nem feszítőfa, de ez nekünk nem is kell.) Az x csúcstol j távolságra levő csúcsok halmaza legyen V_j. A fa első szintjén vannak az x szomszédai vagyis a V_1 halmaz elemei. Legyen $y, z \in V_1$. Ekkor y szomszédai nem lehetnek V_1-ben, mert nincs háromszög a gráfban. Továbbá y és z-nek x-en kivűl nincs közös szomszédja, mert akkor lenne benne egy 4-hosszú kör. Tehát a V_1-beli csúcsok mindegyikének van legalább $d-1$ szomszédja és ezek mind különbözőek. Általában is legyen $u, v \in V_j$ ahol $j \leq k-1$. Ekkor u és v nem lehet összekötve, mert akkor a fán felsétálva a közös ősig kapnánk egy legfeljebb $2k$ hosszú páratlan kört. Közös szomszédjuk sem lehet V_{j+1}-ben, mert akkor a közös szomszédból felsétálva u, v-n keresztül u és v közös ősébe kapnánk egy legfeljebb $2k$-hosszú páros kört. Tehát minden V_j-beli csúcsnak ($j \leq k-1$) legalább $d-1$ szomszédja van V_{j+1}-ben és ezen csúcsok mind különbözőek. Tehát

$$|V_{j+1}| \geq (d-1)|V_j|$$

ha $j \leq k-1$. Így

$$n \geq |V_k| \geq (d-1)|V_{k-1}| \geq (d-1)^2|V_{k-2}| \geq \cdots \geq (d-1)^k.$$

Tehát $d \leq n^{1/k}+1$. Töröljük ki x-t a gráfból, ekkor a maradék $n-1$ csúcsú gráfban sincs legfeljebb $2k$-hosszú kör, így ebben a legkisebb fokszám legfeljebb $(n-1)^{1/k}+1$, azt is töröljük ki... Ezt addig folytatva, amíg el nem fogy G_n minden csúcsa kapjuk, hogy

$$e(G_n) \leq (n^{1/k}+1) + ((n-1)^{1/k}+1) + \cdots + (1^{1/k}+1) \leq n \cdot n^{1/k} + n.$$

Tehát $e(G_n) \leq n^{1+1/k} + n$. □

3. Általános extremális gráfelméleti lemmák

Ebben a részben összegyüjtöttem néhány olyan triviális észrevételt, melyek általában is nagyon hasznosak és a Bondy-Simonovits tétel bizonyításában is használjuk.

3.1. Lemma. *Legyen G egy gráf $e(G)$ éllel. Ekkor létezik olyan H páros részgráfja, melyre $d_H(x) \geq \frac{1}{2}d_G(x)$ minden $x \in V(G)$-re teljesül. Speciálisan, $e(H) \geq \frac{1}{2}e(G)$.*

Bizonyítás. Adott $A \subseteq V(G)$ esetén jelölje $e(A, V \setminus A)$ az A és $V \setminus A$ halmazok között menő élek számát. Legyen $X \subseteq V(G)$ olyan, hogy $e(X, V \setminus X)$ maximális. Legyen H az a páros gráf, melynek két osztálya X és $V \setminus X$. Azt állítjuk, hogy ekkor $d_H(x) \geq \frac{1}{2}d_G(x)$ minden $x \in V(G)$-re teljesül. Valóban, ha ez valamely $v \in V$-re nem teljesülne akkor v-t átraknánk a másik osztályba és nőne a két osztály között menő élek száma $(d_G(v) - d_H(v)) - d_H(v) = d_G(v) - 2d_H(v)$ darab éllel. Ezzel bebizonyítottuk a lemmát. □

3.2. Megjegyzés. A 3.1 Lemmát általában a következőkre használjuk. Tegyük fel, hogy azt akarjuk bizonyítani, hogy ha egy n csúcsú gráfban nincs K kizárt részgráf akkor G-nek legfeljebb $O(f(n))$ éle van. Ha ezt be tudjuk bizonyítani páros gráfokra akkor egy 2-es szorzót veszítve ugyan, de máris be tudjuk bizonyítani az összes gráfra a lemma segítségével. Mivel hasznos lehet ilyen állítás, ezért kimondok még két hasonló állítást bizonyítas nélkül.

3.3. Lemma. *Legyen G egy gráf $e(G)$ éllel. Ekkor létezik olyan $H = (A, B, E')$ páros részgráfja, melyre $||A| - |B|| \leq 1$ és $e(H) \geq \frac{1}{2}e(G)$.*

3.4. Megjegyzés. Tehát meg lehet követelni, hogy a páros gráf két osztálya közel ugyanakkora legyen. Sajnos azt nem lehet elérni, hogy minden egyes csúcs fokára is teljesüljon $d_H(x) \geq \frac{1}{2}d_G(x)$ egyenlőtlenség és az osztályok is közel ugyanakkorák legyenek. Ötlet a lemma bizonyításához: várható érték módszer vagyis átlagolás.

Néha szükség lehet rá, hogy a fokszámok ne csak alulról legyenek korlátozva hanem felülről is. A következő állítás erre példa.

3.5. Lemma. *Legyen G egy d-reguláris gráf. Ekkor létezik olyan $H = (A, B, E')$ páros részgráfja, melyre*

$$\left| d_H(x) - \frac{d}{2} \right| \leq 10\sqrt{d \log d}$$

minden $x \in V(G)$-re.

3.6. Megjegyzés. Bizonyítási ötlet: LLL vagyis Lovász lokál lemma.

⋆ ⋆ ⋆

A következőkben egy másik nagyon hasznos triviális állítást bizonyítunk.

3.7. Lemma (Minimális fokszám-átlag fokszám elv)**.** *Legyen P egy tulajdonság, melyre teljesül, hogy ha egy H-nak megvan a P tulajdonsága akkor minden olyan gráfnak is mely feszített részgráfként tartalmazza H-t. (Példa: $P(K)$ az a tulajdonság, hogy G-nek részgráfja-e egy adott K gráf.) Tegyük fel, hogy ha egy legfeljebb n csúcsú gráfnak $r = r(n)$ a minimális foka akkor teljesül rá a P tulajdonság. Tegyük fel, hogy az n csúcsú G-re nem teljesül a P tulajdonság, ekkor legfeljebb $(r-1)n$ éle van így az átlag fokszám G-ben legfeljebb $2r$.*

Bizonyítás. Mivel G-re nem teljesül P, így van legfeljebb $r - 1$ fokú csúcsa, ezt kitörölve megint van a gráfban legfeljebb $r - 1$ fokú csúcs... Így a gráfnak legfeljebb $(r - 1)n$ éle van. Így kevesebb, mint rn éle van, azaz az átlagfokszám legfeljebb $2r$. □

3.8. Megjegyzés. Ha egy gráfban a miniális fokszám legalább 3 akkor tartalmaz páros hosszú kört (miért?). Így ha egy n csúcsú gráfban nincs páros hosszú kör akkor legfeljebb $2n$ éle van.

Tehát a 3.7 Lemma értelmében ha azt akarjuk bizonyítani, hogy egy gráfnak legfeljebb rn éle van akkor elég igazolni, hogy r minimális fokszám esetén már P tulajdonságú lenne.

4. 1.1 Tétel bizonyítása

Ebben a részben rátérünk a Bondy-Simonovits tétel bizonyítására. Mint azt már említettük, egy kicsit erősebbet fogunk bizonyítani.

4.1. Tétel. *Legyen G_n egy n csúcsú gráf. Ha $e(G_n) > 100kn^{1+1/k}$ akkor $C_{2\ell} \subseteq G_n$ minden $\ell \in [k, kn^{1/k}]$.*

Igazából a következő állítást kellemesebb lesz bizonyítani.

4.2. Tétel. *Legyen $E = e(G_n)$. Ekkor $C_{2\ell} \subseteq G_n$ minden $\ell \geq 2$ esetén, melyre teljesül, hogy $\ell \leq \frac{E}{100n}$ és $\ell n^{1/\ell} \leq \frac{E}{10n}$.*

Könnyen látható, hogy 4.2 tételből következik 4.1 tétel, amelyből pedig következik az 1.1 tétel.

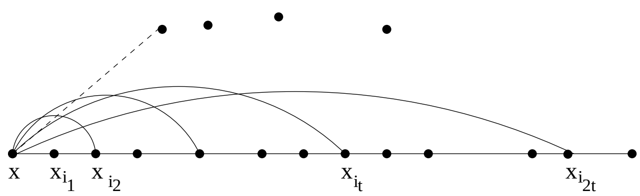
⋆ ⋆ ⋆

Most bebizonyítunk egy első látásra ide nem illő lemmát. Ez az egyelőre kicsit misztikus lemma még jól fog jönni. Szükségünk van a következő definícióra.

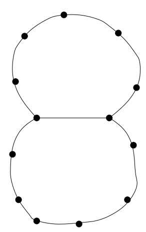
4.3. Definíció. Egy G gráf csúcsainak egy (nem feltétleül jó) színezése *t-periódikus* ha tetszőleges G-beli t-hosszú út két végpontja azonos színű.

4.4. Lemma. *Legyen t pozitív egész és legyen G egy gráf $v(G)$ csúcson, $e(G)$ éllel, melyre $e(G) \geq 2tv(G)$. Ekkor G tetszőleges t-periódikus színezésében a színek száma legfeljebb* 2.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $e(G) \geq 2tv(G)$ akkor G tartalmaz két szomszédos pontot, amelyeket összeköt két legalább t hosszú út. Az 3.7 Lemma (minimális fokszám-átlag fokszám elv) miatt elég ezt olyan gráfokra megmutatni, ahol a minimális fokszám legalább $2t$. Tehát tegyük fel, hogy G-ben a minimális fokszám legalább $2t$.



Legyen $P = x_1x_2\dots x_k$ a G egy leghosszabb útja. Mivel P egy leghosszabb út, ezért x_1 minden szomszédja P-belinek kell lennie, különben P-t meg lehetne hosszabítani. Legyenek x_1 szomszédai: $x_{i_1} = x_2, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$, ahol $r \geq 2t$. Tekintsük az x_1 és x_{i_t} csúcsokat, ők szomszédosak és összeköti őket a diszjunkt $P_1 = x_1x_2\dots x_{i_t}$ valamint $P_2 = x_{i_t}x_{i_t+1}\dots x_{i_{2t}}x_1$ útak, melyek legalább t-hosszúak. A továbbiakban hívjuk ezt a speciális részgráfot Θ-gráfnak.



Mivel G színezese t-periódikus, ezért természetesen a Θ-részgráf színezése is t-periódikus. A következő lépésben tekintsük ezt a t-periódikus színezést. Legyen C_1, C_2, C_2 a Θ-gráf három köre, hosszaik legyenek rendre ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Legyen t_i a legkisebb periódus, amivel C_i kör periódikus.

Könnyű látni, hogy mind a három körön ugyanannak a periódusnak kell lennie (miért?), így $t_1 = t_2 = t_3$. Másrészt $t_i \mid \ell_i$. Ha C_3 kör a leghosszabb akkor $\ell_1+\ell_2-\ell_3=2$, így $t_i=t^* \mid 2$ azaz $t^*=1$ vagy 2. Tehát a Θ-részgráfon legfeljebb csak két színt használhatunk.

Mivel G összefüggő, ezért tetszőleges v csúcshoz létezik egy út a Θ-részgráfhoz, legyen ez $ta+b$ hosszú ($b<t$). Ekkor még $t-b$ lépést téve a Θ-részgráfon lesz olyen pontja a Θ-részgráfnak amit t-vel osztható hosszúságú út köt össze v-vel, így ennek a két csúcsnak a színe meg kell egyezzen. Tehát az egész gráf is legfeljebb két színnel van kiszínezve. $\square$

Az alábbi lemma tekinthető a bizonyítás főlépésének, a 4.2 tétel ebből már könnyen ki fog jönni.

4.5. Lemma. *Legyen G páros gráf n csúcson, melyben a minimális fok legalább $s=\max(5\ell n^{1/\ell}, 50\ell)$. Ekkor $C_{2\ell}\subseteq G$.*

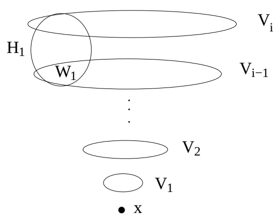
Bizonyítás. Legyen x a G gráf egy tetszőleges csúcsa és legyen V_i az x-től i távolságra levő pontok halmaza. Mivel G páros, ezért V_i független halmaz minden i-re.

Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz $C_{2\ell}$ kört. Megmutatjuk, hogy ekkor $1\le i\le \ell$ esetén

$$\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|}\ge \frac{s}{5\ell}. \qquad (*)$$

Ez azonnal ellentmondáshoz vezet, mert $s\ge 5\ell n^{1/\ell}$ miatt $|V_i|\ge n^{1/\ell}|V_{i-1}|$, így $|V_\ell|\ge n$, de az egész gráfnak n csúcsa van.

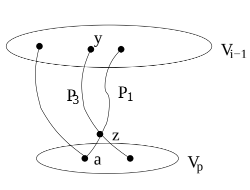
A fenti $(*)$ állítást i-re menő indukcióval bizonyítjuk. Az $i=1$ eset triviális, mert $\deg(x)\ge s\ge \frac{s}{5\ell}$. Tegyük fel, hogy az állítást már beláttuk $i-1$-re.



Legyen $H=G[V_{i-1}\cup V_i]$ a $V_{i-1}\cup V_i$ által feszített részgráfja G-nek. Legyen $H_1,\dots H_q$ a H komponensei. Végül legyen $W_j=H_j\cap V_{i-1}$. Egy $y_1y_2\dots y_r$ útat monotonnak hívunk ha az y_i csúcs x-től való távolsága szigorúan monoton nő vagy csökken. (Vagyis egy monoton útnak minden V_i halmazzal legfeljebb 1 közös pontja van.)

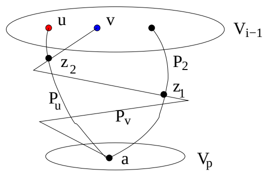
Megmutatjuk, hogy $e(H_1)<4\ell v(H_1)$. Ez triviális ha $|W_1|=1$ ugyanis ekkor ha ennek az 1 pontnak d a foka H-ban akkor a $d<4\ell(d+1)$ egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Tehát tegyük fel, hogy W_1-nek legalább 2 pontja van.

Legyen $a\in V_p$, melyre a következő teljesül:
(i) létezik két monoton út, P_1 és P_2, a-ból W_1-be melyeknek csak $''a''$ a közös pontjuk,
(ii) p minimális, melyre (i) teljesül.



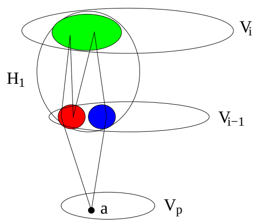
Először is megmutatjuk, hogy ekkor W_1 minden csúcsa össze van kötve egy monoton úttal a-val. Legyen $y\in W_1$ és legyen P_3 egy monoton út x és y között. Ekkor p minimalítása miatt P_3-nak metszenie kell P_1-et valamilyen z pontban és ekkor kapunk egy monoton útat a és y között: aP_1zP_3y monoton út a és y között.

Következő lépésben piros és kék színeket rendelünk a W_1 csúcsaihoz oly módon, hogy ha két csúcsnak, u-nek és v-nek, különböző a színe akkor létezik u-ból és v-ből egy-egy monoton út a-ba, melyeknek egyetlen közös pontja az a csúcs.



Ezt a következőképpen tehetjük meg: ha az u csúcshoz létezik egy monoton út u-ból a-ba, mely diszjunkt P_2-től, akkor legyen a színe piros, egyébként meg legyen a színe kék. Megmutatjuk, hogy ez egy jó színezés.

Tegyük fel, hogy u színe piros, v színe kék. Így létezik egy P_u monoton út u és a között, mely diszjunkt P_2-től. Legyen P_v egy tetszőleges monoton út v és a között. Mivel v kék, így P_v metszi P_2-t a-tól különböző pontban, legyen az utolsó ilyen metszéspont P_v-n számolva z_1. Tegyük fel, hogy P_u és P_v nem diszjunktak vagyis van egy a-tól különböző metszéspontjuk, legyen z_2 a metszéspontok közül az utolsó megint csak P_v-n számolva. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy mi a z_1 és z_2 sorrendje a P_v úton. Ha z_2 van közelebb v-hez akkor $vP_vz_2P_ua$ egy P_2-től diszjunkt monoton út v és a között, így v színe piros lett volna. Ha z_1 van közelebb v-hez P_v-n akkor $vP_vz_1P_2a$ egy monoton út v-ből a-ba, amely diszjunkt P_u-tól. Tehát ez a színezes valóban jó.



Most színezzük $H_1 \cap V_i$ pontjait zölddel. Azt állítjuk, hogy H_1-nek ez a piros-kék-zöld színezése t-periódikus $t = 2(\ell - i + p + 1)$ periódussal. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Mivel H_1 páros gráf, ez csak úgy lehet, hogy van egy piros $u \in W_1$ és kék $v \in W_1$, amelyeket összeköt egy $2(\ell - i + p + 1)$-hosszú Q út H-ban. Mivel u és v színe különbözik, így van két diszjunkt monoton út, P_u és P_v, u-ból és v-ből a-ba. Ekkor azonban Q, P_u, P_v útak egy kört határoznak, melynek hossza $2(\ell - i + p + 1) + 2(i - 1 - p) = 2\ell$, ami viszont nem lehet. Tehát ez a színezés valóban t-periódikus.

Így a kicsit misztikus 4.4 Lemma szerint

$$e(H_1) \leq 2tv(H_1) < 4\ell v(H_1).$$

Hasonlóan kapjuk a $H_2, \ldots, H_q$ komponensekre, hogy $e(H_i) \leq 4\ell v(H_i)$ $(i = 1, \ldots, q)$. Tehát $e(H) < 4\ell v(H)$.

Legyen $H^* = G[V_{i-2} \cup V_{i-1}]$. Az előzőekhez hasonlóan $e(H^*) < 4\ell v(H^*)$. Továbbá az indukció miatt

$$\frac{|V_{i-1}|}{|V_{i-2}|} \geq \frac{s}{5\ell}. \qquad (**)$$

Másrészt

$$e(H) + e(H^*) \geq s|V_{i-1}|$$

mivel minden csúcs foka legalább s. Tehát

$$4\ell(|V_{i-1}|+|V_i|+|V_{i-2}|+|V_{i-1}|) = 4\ell(v(H)+v(H^*)) > e(H)+e(H^*) \geq s|V_{i-1}|.$$

Így
$$|V_i| \geq \frac{1}{4\ell}((s-8\ell)|V_{i-1}| - 4\ell|V_{i-2}|).$$
Most használjuk (**)-t.
$$|V_i| \geq \frac{1}{4\ell}\left((s-8\ell) - \frac{20\ell^2}{s}\right)|V_{i-1}|.$$
Mivel $s \geq 50\ell$, így
$$\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|} \geq \frac{1}{4\ell}(s-9\ell) > \frac{1}{4\ell}\frac{4s}{5} = \frac{s}{5\ell}.$$
Ezzel bebizonyítottuk az állítást. □

Most már készen állunk rá, hogy bebizonyítsuk 4.2 Tételt. Egyszerűség kedvéért megismételjük az állítást.

4.2 Tétel *Legyen $E = e(G_n)$. Ekkor $C_{2\ell} \subseteq G_n$ minden $\ell \geq 2$ esetén, melyre teljesül, hogy $\ell \leq \frac{E}{100n}$ és $\ell n^{1/\ell} \leq \frac{E}{10n}$.*

Bizonyítás. Az állítást n-re menő indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén a feltételek nem teljesülhetnek, így az állítás triviálisan igaz.

Használjuk a 3.1 Lemmát: létezik $H_n \subseteq G_n$ páros gráf, melyre $e(H_n) \geq e(G_n)/2$ és minden csúcs H-beli foka legalább fele a G-beli fokának. Ha minden csúcsnak H_n-ben a foka legalább $\frac{E}{2n}$ akkor
$$\max(5\ell n^{1/\ell}, 50\ell) \leq \frac{E}{2n}$$
miatt $C_{2\ell} \subseteq H_n$ a 4.5 Lemma miatt. Tehát ekkor $C_{2\ell} \subseteq G_n$.

Ha létezik $w \in V(H_n)$, melynek a foka H_n-ben kisebb, mint $\frac{E}{2n}$ akkor ennek a csúcsnak a foka G_n-ben kisebb, mint $\frac{E}{n}$. Legyen $G_{n-1} = G_n - w$. Megmutatjuk, hogy G_{n-1}-re teljesülnek az indukciós feltételek vagyis
$$\ell \leq \frac{e(G_{n-1})}{100(n-1)} \quad \text{és} \quad \ell(n-1)^{1/\ell} \leq \frac{e(G_{n-1})}{10(n-1)}.$$
Ekkor $C_{2\ell} \subseteq G_{n-1}$ és így persze $C_{2\ell} \subseteq G_n$. A feltételek valóban teljesülnek. Mivel $\ell \leq \frac{e(G_n)}{100n}$ így
$$\ell \leq \frac{e(G_n)}{100n} = \frac{e(G_n) - \frac{e(G_n)}{n}}{100(n-1)} \leq \frac{e(G_{n-1})}{100(n-1)}.$$
(Mivel w foka kisebb, mint $e(G_n)/n$.) Másrészt $\ell n^{1/\ell} \leq \frac{e(G_n)}{10n}$ miatt
$$\ell(n-1)^{1/\ell} \leq \ell n^{1/\ell} \leq \frac{e(G_n)}{10n} = \frac{e(G_n) - \frac{e(G_n)}{n}}{10(n-1)} \leq \frac{e(G_{n-1})}{10(n-1)}.$$
Tehát valóban teljesülnek a feltételek. Ezzel bebizonyítottuk a tételt. □

4.6. Megjegyzés. A $k = 2, 3, 5$ értékekre létezik konstrukció G_n gráfokra, melyek nem tartalmaznak C_{2k} kört és $cn^{1+1/k}$ élük van.

Hivatkozások

[1] Béla Bollobás: *Extremal Graph Theory*, Dover Publications
[2] J. A. Bondy és M. Simonovits: *Cycles of even length in graphs*, J. Combinatorial Theory Ser. B **16** (1974), pp. 97–105.