Diszkrét matematika zárthelyi megoldásai

1. Tegyük fel, hogy egy d-reguláris G gráfra teljesül, hogy ha két különböző csúcs össze van kötve akkor nincs közös szomszédjuk, ha pedig nincsenek összekötve akkor pontosan két közös szomszédjuk van.

a., Hány csúcsa van G-nek d függvényében? (Ez még csak cseresznyézés.)

b., Mutasd meg, hogy létezik egy r egész szám, hogy $d = r^2 + 1$.

Megoldás: Legyen $d = k$. A $(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1)$ összefüggésbe helyettesítve $\lambda = 0, \mu = 2$ értékeket kapjuk, hogy $v = \frac{1}{2}k(k + 1) + 1$. A keresett gráf nem lehet konferencia gráf, mert $\lambda - \mu = -2$, nem pedig -1. Így a sajátértékei egészek, vagyis $\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} = \sqrt{4(k - 1)}$ egész szám. Így $k = r^2 + 1$.

2. Barkochbázzunk! Hány kérdéssel lehet kitalálni egy 1 és 8 közötti számot, ha a kérdéseket előre kell megadni, a válasz mindig igen vagy nem lesz, de lehet, hogy egy kérdésre hamis választ kapsz? (A kérdéseknek mindig olyan alakúnak kell lennie, hogy "benne van-e a gondolt szám az alábbi halmazban?".)

Megoldás: A feladat ekvivalens azzal, hogy adjuk meg a legkisebb n-t, melyre létezik n hosszú 8 kódszóból álló C kód a $\{0, 1\}$ ábécé felett, melynek minimális távolsága 3. A Hamming-korlátból kapjuk, hogy $2^n \geq 8(n+1)$, így $n \geq 6$. Másrészt $n = 6$ esetén létezik ilyen kód: írjuk fel a számokat kettes számrendszerben (a 8 helyett 000-t írva), legyenek a számjegyek $x_1x_2x_3$. Legyen $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3) \,|(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_2^3\}$ kód. Ez lineáris kód, így elég belátni, hogy egy nem $\underline{0}$ szó súlya legalább 3. Ez könnyen láthatóan teljesül akkor is x_1, x_2, x_3 között pontosan $1, 2$ vagy 3 darab 1-es van.

3. Legyen H_n egy $n \times n$-es Hadamard mátrix. Legyen s_k a k. oszlopban a számok összege.

(a) Határozd meg $\sum_k s_k^2$ értékét.

(b) Bizonyítsd be, hogy a Hadamard mátrix elemeinek összege legfeljebb $n^{3/2}$. (Vigyázat, nem lehet feltenni, hogy a csupa 1 vektor a mátrix sorai között van.)

Megoldás: Legyen $\underline{c}_i$ az i. sorvektor. Vegyük észre, hogy

$$\sum_k s_k^2 = \sum_k (\sum_i c_{ik})^2 = \sum_k \sum_{i,j} c_{ik}c_{jk} =$$

$$= \sum_{i,j} \sum_k c_{ik}c_{jk} = \sum_{i,j} (c_i, c_j) = \sum_i n = n^2.$$

Így

$$(\sum_k s_k)^2 \leq n(\sum_k s_k^2) = n^3.$$

Tehát
$$\sum_k s_k \leq n^{3/2}.$$

4. Legyen T fa n csúcson. Mutasd meg, hogy a legnagyobb sajátértéke legfeljebb $\sqrt{n-1}$. Állhat-e egyenlőség a becslésben?

Megoldás: Legyenek a T fa sajátértékei $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Mivel T egy páros gráf így $\lambda_n = -\lambda_1$ (lásd 2. feladatsor 4. feladata). Tehát
$$2(n-1) = 2e(G) = \sum_i \lambda_i^2 \geq 2\lambda_1^2.$$
(A $2e(G) = \sum_i \lambda_i^2$ a 2. feladatsor 3. feladata volt.) Így $\lambda_1 \leq \sqrt{n-1}$. Egyenlőség fennállhat: $K_{1,n-1}$ csillag legnagyobb sajátértéke $\sqrt{n-1}$.

5. Legyen H egy $n \times n$-es Hadamard-mátrix, melynek minden sorában pontosan k darab 1-es és $n-k$ darab -1-es van. Mutasd meg, hogy n négyzetszám! Mutass példát $n=4$ és $n=16$ esetén ilyen Hadamard-mátrixra.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy egy Hadamard-mátrix minden sajátértékének abszólút értéke $\sqrt{n}$. Legyen $H\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Ekkor
$$|\lambda|^2||\underline{v}||^2 = ||\lambda\underline{v}||^2 = ||H\underline{v}||^2 = (H\underline{v})^T H\underline{v} = \underline{v}^T H^T H\underline{v} = \underline{v}^T nI\underline{v} = n\underline{v}^T\underline{v} = n||\underline{v}||^2.$$
Tehát $|\lambda| = \sqrt{n}$.

Vegyük észre, hogy ha a Hadamard-mátrix minden sorában pontosan k darab 1-es és $n-k$ darab -1-es van akkor $H\underline{1} = (2k-n)\underline{1}$. Ekkor az előző észrevétel szerint $(2k-n)^2 = n$ vagyis n négyzetszám.

Legyen H_4 az a 4×4-es mátrix, melynek átlójában 1-esek vannak, mindenhol máshol pedig -1-esek. Ez Hadamard-mátrix és megfelel a feltételeknek. A $H_4 \otimes H_4$ pedig megfelelő Hadamard-mátrix $n=16$-ra.

6. Legyen C egy $(7,16,3)_2$ paraméterű kód, melyre $\underline{0} \in C$. Mutasd meg, hogy ez egyértelműen meghatározza a kódot a koordináták permutációjának erejéig.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a kód szükségszerűen perfekt, mert egyenlőséggel teljesíti a Hamming korlátot:
$$16 = \frac{2^7}{1+7}.$$
Így alkalmazhatjuk a 4. feladatsor 1. feladatát az i súlyú szavak megszámolására:
$$\binom{7}{i} = (7-i+1)A_{i-1} + A_i + (i+1)A_{i+1}.$$
Az $A_0 = 1$, mert $\underline{0} \in C$. Innen kapjuk, hogy $A_3 = A_4 = 7$ és $A_7 = 1$. Tehát $\underline{1} \in C$. Apró trükk: legyen $c \in C$ és tekintsük a $c + C = \{c + c' \mid c' \in C\}$ kódot. Ez is teljesíti a feltételeket, így ebben is ugyanolyan súlyú szavak kellenek, hogy legyen. Speciálisan C-ben minden 4 súlyú szó egy 3 súlyú

szó komplementere és két különböző 3 súlyú szónak egy darab közös 1-ese van. Ebből következik, hogy a 3 súlyú szavak a Fano-sík egyeneseinek a karakterisztikus vektorai. Tehát C éppen a 3. feladatsor 5. feladatában leírt Hamming-kód.

7. Legyen G gráf erősen reguláris (v, k, λ, μ) paraméterekkel. Tegyük fel, hogy G nem az üres vagy a teljes gráf és $v = p$ prím. Mutasd meg, hogy ekkor G konferencia gráf.

Megoldás: Legyen G egy (p, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf, ahol p prím. Ha nem minden sajátérték egész akkor az órán tanultak szerint G konferencia gráf és kész vagyunk. Megmutatjuk, hogy ha G-nek minden sajátértéke egész akkor üres vagy teljes gráf. Mivel egy erősen reguláris gráf komplementere is erősen reguláris, elég belátni, hogy ha $k \leq (p-1)/2$ akkor G üres gráf. (Egy reguláris egész spektrumú gráf komplementerének is egészek a sajátértékei.) Használjuk fel a 2. feladatsor 7. feladatának az állítását: $(k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2) = p\mu$. Mivel minden szám egész, ezért

$$p \mid (k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2).$$

Másrészt $|k - \vartheta_1|, |k - \vartheta_2| \leq 2k \leq (p-1)$. (Itt felhasználtuk, hogy $|\vartheta_1|, |\vartheta_2| \leq k$, ami a 2. feladatsor 2. feladata szerint igaz.) Így csak az lehet, hogy $(k - \vartheta_1), (k - \vartheta_2)$ valamelyike 0. Ekkor $(k - \vartheta_1)(k - \vartheta_2) = p\mu$ miatt $\mu = 0$. Ez csak akkor lehet ha G néhány ugyanakkora méretű teljes gráf uniója. Mivel p prím, ez csak K_p vagy pK_1 lehet. Előbbiben viszont a fokszám $p - 1 > (p-1)/2$. Így csak az utóbbi lehet vagyis G az üres gráf.