# Elemi bizonyítás a barátság tételre

**Tétel (barátság tétel):** Egy $G$ egyszerű gráfban bármely két különböző csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van. Ekkor van olyan csúcs aki minden más csúccsal össze van kötve, és a gráf úgy néz ki, hogy $k$ darab háromszögnek van egy közös csúcsa, ahol $n = 2k+1$ a gráf csúcsainak száma.

**Megjegyzés:** Sajnos nem tudom, hogy az alábbi bizonyítás kitől származik, de amint megtudom, azonnal megirom, hiszen megérdemli, hogy a neve szerepeljen fantasztikus bizonyítása mellett.

**Bizonyítás:** A tételben szereplő gráf valóban teljesíti, hogy bármely két különböző csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van. A bizonyítás első lépéseként megmutatjuk, hogy ha egy gráf teljsíti a feltételt, de nem a tételben leírt alakú, akkor szükségszerűen reguláris gráf.

Megmutatjuk, hogy ha $u$ és $v$ nincs összekötve akkor az ő fokszámaik megegyeznek. Legyen $u$ és $v$ két összekötetlen csúcs. Legyen a közös szomszédja $w$. Legyen $u$ és $w$ közös szomszédja $u'$, $v$ és $w$ közös szomszédja $v'$. Az $u$ és $v'$ nincs összekötve, mert akkor $u$ és $w$-nek két szomszédja is lenne: $u'$ és $v'$. Hasonlóan $v$ és $u'$ sincs összekötve. Legyen $u$ további szomszédjai $u_1, \ldots, u_k$, $v$ további szomszédjai $v_1, \ldots, v_l$. Az $u_i$ csúcsok egyike sincs összekötve $w$ illetve $v'$-vel, mert akkor $u, u'$ illetve $u, w$-nek legalább két közös szomszédja lenne. Ugyanakkor $u_1, \ldots, u_k$ mindegyikének van pontosan egy közös szomszédja $v$-vel, vagyis minden $u_i$-ből vezet él az egyik $v_j$-be. Hasonlóan $v_1, \ldots, v_l$ mindegyikének van pontosan egy közös szomszédja $u$-val, vagyis minden $v_j$-ből vezet él az egyik $u_i$-be. Tehát $k = l$ így $u$ és $v$-nek is $k+2$ szomszédja van.

Most térjünk át a $G$ gráf komplementerére. Az előzőek szerint ha két csúcs össze van kötve akkor az ő fokszámuk megegyezik. Tehát ha egyetlen összefüggőségi komponens van akkor a gráf reguláris, ahogy azt állítottuk. Ha van egy izolált pont akkor ő az eredeti gráfban mindenkivel össze van kötve, ebből pedig már következik, hogy a gráf a tételben leírt alakú. Az utolsó eset, hogy a komplementer gráfban van legalább kettő legalább két csúcsot tartalmazó komponens. Ez azonban nem lehet, mert akkor az egyik komponensben levő csúcsok mindegyik másik komponensben levő csúccsal össze vannak kötve az eredeti gráfban, így ezeknek legalább két közös szomszédja van. Tehát a gráf nem a tételben leírt alakú akkor reguláris.

Továbbiakban felteszük, hogy az $n$ csúcsú, $d$ reguláris gráf teljesíti a tétel feltételét. Számoljuk le a cseresznyék számát. Ez egyrészt $n\binom{d}{2}$, hiszen minden csúcs $\binom{d}{2}$ cseresznye középső csúcsa. Másrészt $\binom{n}{2}$ cseresznye van, bármely két csúcsra pontosan egy cseresznye illeszkedik. Ebből következik, hogy $n = d^2 - d + 1$.

A következő lépés a bizonyítás legravaszabb lépése. Legyen $W_k$ a $k$-hosszú zárt séták száma. Felirunk egy rekurziót $W_k$-ra. Egy csúcsból elindulva mindig $d$ irányba léphetünk tovább. Nézzük meg mi történik $k-2$ lépés utan. $W_{k-2}$ esetben éppen visszaértünk, ekkor minden ilyen zárt setát $d$ féleképpen tehetünk zárttá: $d$ szomszéd valamelyikébe lépünk, majd vissza. Másik lehetséges eset, hogy $k-2$ lépés után nem érünk vissza az eredeti csúcsba, ekkor ezt a sétát csak egy félekeppen lehet befejezni $k$ hosszú zárt sétává, az utolsó pontból ellépünk az első és utolsó egyetlen közös szomszédjába, majd onnan az első csúcsba. Az $n$ csúcs valamelyikéből elindulva, majd $k-2$ lépést megtéve $W_{k-2}$ esetben fordul elő az első eset és $nd^{k-2} - W_{k-2}$ esetben a második. Így

$$W_k = dW_{k-2} + nd^{k-2} - W_{k-2}.$$

Általában egy tetszőleges $p$ prímre $p \mid W_p$ ugyanis tetszőleges $p$-hosszú zárt sétát el lehet "forgatni" $p$-szer, így osztva be a $p$ hosszú zárt sétákat $p$-es csoportokba. Másrészt tegyük fel, hogy $d-1>1$ és $p$ egy prímosztója $d-1$-nek, ekkor

$$W_p = dW_{k-2} + nd^{k-2} - W_{k-2} \equiv (d(d-1)+1)d^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ez ellentmond annak amit éppen most állapítottunk meg, nevezetesen, hogy $p \mid W_p$. Tehát $d-1=1$ vagyis $d=2$ és $n=3$, így $G$ egy háromszög, ez azonban a tételben leírt alakú gráf.