Erdős-Landau tétel

Legyen $\mathbb{B} \subset \mathbb{N}$ h rendű bázis, azaz minden $m \in \mathbb{N}$ felírható $m = b_1 + \cdots + b_k$ ($k \leq h$, $b_i \in \mathbb{B}$) alakban. Jelölje $h(m)$ azt, hogy minimum hány $\mathbb{B}$-beli összegeként lehet felírni m-et. Legyen $h^* = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n h(m) \leq h$ a $\mathbb{B}$ bázis átlagos rendje. Vegül jelölje

$$\sigma(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n}$$

az $A \subset \mathbb{Z}$ Schnirelmann-sűrűségét.

Tétel (Erdős-Landau): Legyen $\mathbb{B}$ bázis h^* átlagos renddel, ekkor minden A-ra

$$\sigma(A + \mathbb{B}) \geq \sigma(A) + \frac{1}{2h^*}(1 - \sigma(A))\sigma(A)$$

Bizonyítás: Legyen $C = A + \mathbb{B}$. Mi $C(n) - A(n)$-re szeretnénk alsóbecslest adni. Legyen $1 \leq m \leq n$ és $\overline{D}_n(m) = |\{a \in A \mid a + m \leq n,\ a + m \notin A\}|$.

Világos, hogy minden $b \in \mathbb{B}$-re $\overline{D}_n(b) \leq C(n) - A(n)$. Legyen $\overline{D}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \overline{D}_n(m)$.

Megmutatjuk, hogy $\overline{D}_n^* \leq h^*(C(n) - A(n))$. Ehhez először belátjuk, hogy

$$\overline{D}_n(m + m') \leq \overline{D}_n(m) + \overline{D}_n(m').$$

Valóban

$$\{a \in A \mid a + m + m' \leq n,\ a + m + m' \notin A\} =$$
$$= \{a \in A \mid a + m + m' \leq n,\ a + m \in A,\ a + m + m' \notin A\} \cup$$
$$\cup \{a \in A \mid a + m + m' \leq n,\ a + m \notin A,\ a + m + m' \notin A\} \subset$$
$$\{a + m \in A \mid a + m + m' \leq n,\ a + m + m' \notin A\} \cup$$
$$\cup \{a \in A \mid a + m + (m') \leq n,\ a + m \notin A\}$$

Itt az utolsó előtti halmaz elemszáma kisebb, mint $\overline{D}_n(m')$, míg az utolsó elemszáma $\overline{D}_n(m)$-nél kisebb. Tehát $\overline{D}_n(m + m') \leq \overline{D}_n(m) + \overline{D}_n(m')$.

Így $\overline{D}_n(m) \leq \overline{D}_n(b_1) + \cdots + \overline{D}_n(b_{h(m)}) \leq h(m)(C(n) - A(n))$. Így persze

$$\overline{D}_n^* \leq h^*(C(n) - A(n)).$$

Legyen $D_n(m) = \{a \in A \mid a + m \leq n,\ a + m \in A\}$. Ekkor $\overline{D}_n(m) + D_n(m) = A(n - m) \geq (n - m)\sigma(A)$. Ezek után felírhatjuk, hogy

$$n\overline{D}_n^* = \sum_{m=1}^n \overline{D}_n(m) \geq \frac{n(n-1)}{2}\sigma(A) - \sum_{m=1}^n D_n(m)$$

Ezutóbbi összeget azonban meghatározhatjuk

$$\sum_{m=1}^n D_n(m) = |\{a_i + m = a_j \leq n\}| = \frac{1}{2}A(n)(A(n) - 1).$$

Vagyis

$$D_n^* \geq \frac{1}{2}(n-1)\sigma(A) - \frac{1}{2n}A(n)(A(n)-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)\sigma(A) + \frac{1}{2}\frac{A(n)}{n} - \frac{1}{2n}A(n)^2 \geq \frac{n}{2}\sigma(A) - \frac{1}{2n}A(n)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}n\left(\sigma(A) - \left(\frac{A(n)}{n}\right)^2\right)$$

Tehát

$$\frac{C(n)}{n} \geq \frac{A(n)}{n} + \frac{1}{h^*}\frac{D_n^*}{n} \geq \frac{A(n)}{n} + \frac{1}{h^*}\frac{1}{2}\left(\sigma(A) - \left(\frac{A(n)}{n}\right)^2\right)$$

Másrészt az $x - \frac{1}{2h^*}x^2$ függvény monoton nő a $(0,1)$ intervallumban, így

$$\sigma(A) - \frac{1}{2h^*}\sigma(a)^2 \leq \frac{A(n)}{n} - \frac{1}{2h^*}\left(\frac{A(n)}{n}\right)^2$$

Így

$$\frac{C(n)}{n} \geq \sigma(A) - \frac{1}{2h^*}\sigma(A)^2 + \frac{1}{2h^*}\sigma(A) = \sigma(A) + \frac{1}{2h^*}\sigma(A)(1-\sigma(A))$$

Infinimumát véve a bal oldalnak kapjuk, hogy

$$\sigma(A+\mathbb{B}) \geq \sigma(A) + \frac{1}{2h^*}(1-\sigma(A))\sigma(A)$$

$\square$